ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 3, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Р. Л. ШАХБАГЯН

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В цилиндрической области $\Omega=(0, T)\times G$, где G — ограниченная область евклидова пространства R_n, рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения второго порядка вида

$$L(u)=\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_i(Du)=h(t, x), \tag{1}$$

где

$$x=(x_1,\cdots, x_n), \quad D=(D_1,\cdots, D_n), \quad D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad A_i=\frac{\partial A}{\partial D_i}$$

$$|A(\xi_1,\cdots, \xi_n)|\leqslant C(|\xi|^p+1), \quad A(0)=0.$$

Функции $A_i(\xi_1,\cdots, \xi_n)$ имеют порядок роста по ξ, не превосходящий $p-1$, причем, для простоты, предполагается, что при $p-1\geqslant 1$ $|A_i(\xi_1,\cdots, \xi_n)|\leqslant C(|\xi|^{p-1}+1)$, где $|\xi|=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|$. На боковой поверхности $B=(0, T)\times\Gamma$, где Γ — граница G, зададим, для простоты, нулевые граничные условия

$$u|_B=0, \tag{2}$$

а при $t=0$ — начальное условие

$$u|_{t=0}=0. \tag{2'}$$

Используя то обстоятельство, что уравнение (1) имеет „потенциальную" форму, удается получить априорную оценку для возможных решений задачи (1), (2), (2'), из которой следует существование у решения суммируемой с квадратом производной по времени.

Это позволило рассмотреть уравнения более общего вида и доказать для них однозначную разрешимость первой краевой задачи.

Введем некоторые обозначения. Пусть $W_p^{(1)}$ — пространство С. Л. Соболева [3] функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{1,p}=\left(\int_G\left(|u|^p+\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

и $L_p(0, T; \ W_p^{(1)})$ — пространство функций $w(t, x)$, $0<t<T$, $x\in G$ с конечной нормой вида

$$\|w\|_{1,p}=\left(\int\limits_0^T \|w(t, x)\|_{1,p}^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\iint\limits_{Q}\left(|w|^p+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|^p\right)dx\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty. \tag{4}$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(G)$ и $L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)})$ подпространства этих пространств, состоящие из функций, удовлетворяющих (в среднем) на Γ, соответственно на $(0, T)\times\Gamma$, нулевым граничным условиям. Функции $A_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ имеют степенной порядок роста на бесконечности по ξ:

$$|A_i(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)|\leqslant C(|\xi|^{p-1}+1), \tag{5}$$

где $|\xi|=\sum\limits_{i=1}^n|\xi_i|$, $p\geqslant 2$, C не зависит от ξ.

Решение задачи (1), (2), (2′) ищется в пространстве $u(t, x)\in \in L_p(0, T; \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)})$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in L_2(0, T; L_2(G))$. Это решение $u(t, x)$, по определению, удовлетворяет соотношению

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, v\right]+\sum_{i=1}^n\left[A_i(Du), \frac{\partial v}{\partial x_i}\right]=[h, v], \tag{6}$$

где v — любая функция пространства $L_p(0, T; \ \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)})$, причем в последнем соотношении квадратными скобками обозначено следующее: $[u, v]=\iint\limits_{Q} u(t, x)\,v(t, x)\,dx\,dt$. В дальнейшем будет использовано также обозначение: $(u, v)=\int\limits_G u(x)\,v(x)\,dx$.

Условия, при выполнении которых существует и единственно решение задачи, для простоты, приведем в алгебраической форме.

Условие I. Для любых чисел ξ_i и η_k

$$E(\xi; \eta_k, \eta_i)=\sum_{k, i=1}^n A_{ik}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,\eta_k\,\eta_i\geqslant\sum_{i=1}^n\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,\eta_i^2, \tag{7}$$

где

$$A_{ik}(\xi_1, \cdots, \xi_n)=\frac{\partial A_i}{\partial\xi_k},$$

$$\varphi(z)=c^2(1+|z|^{p-2}). \tag{8}$$

Условие II. Функции $A_i(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ удовлетворяют условию (5), а частные производные по ξ_k имеют порядок роста на единицу меньший, то есть

$$\left|\frac{\partial A_i(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{\partial\xi_k}\right|\leqslant C(|\xi|^{p-2}+1). \tag{9}$$

Условие III. Билинейная форма $E(\xi;\eta'_k,\eta_l)$ оценивается сверху через соответствующую ей квадратичную форму:

$$|E(\xi;\eta'_k,\eta_l)|=\left|\sum_{i,k}A_{ik}(\xi_1,\cdots,\xi_n)\eta'_k\eta_l\right|\leqslant C_1^2(E(\xi;\eta_k,\eta_l)+E(\xi;\eta'_k,\eta'_l)). \tag{10}$$

Предположим далее, что функция $h(t,x)$, входящая в правую часть уравнения (1), непрерывна и допускает непрерывные частные производные до второго порядка в Ω, кроме того, $h(t,x)$ удовлетворяет условию согласования

$$(h(t,x),v(x))|_{t=0}=0,\quad v\in \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}(G). \tag{11}$$

Как доказано в работе [1], при выполнении вышесформулированных условий задача (1), (2), (2′) имеет, и притом единственное, решение $u(t,x)\in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^{(1)})$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in L_2(0,T;L_2(G))$ при любых гладких правых частях $h(t,x)$, удовлетворяющих соотношению (11). Решение задачи строится с помощью некоторого аналога метода Галеркина. Выбирается некоторая система базисных функций $\{v_i(x)\}$, k-ое приближение искомой функции $u(t,x)$ ищется в виде: $u_k(t,x)=\sum_{i=1}^{k}c_{ik}(t)v_i(x)$; функции $c_{ik}(t)$ подлежат определению.

Из равномерной оценки

$$\left[\frac{\partial z_k}{\partial t},\frac{\partial z_k}{\partial t}\right]+\int_0^T|z_k(\tau,x)|^p_{m,p}d\tau+\sum_{i=1}^n\int_0^T E\left(D(z_k+f);\sqrt{\psi}\frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i^2}\right)d\tau+$$

$$+\int_0^T(T-\tau)\left\{E\left(D(z_k+f);\frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i\partial t}\right)+\lambda\left(\frac{\partial z_k}{\partial\tau},\frac{\partial z_k}{\partial\tau}\right)\right\}d\tau\leqslant K(h,f), \tag{12}$$

где $z_k=\sum_{i=1}^{k}c_{ik}(t)v_i(x)$, $\psi(x)$ — гладкая функция, обладающая следующими свойствами:

$$\psi|_\Gamma=0,\cdots,D^3\psi|_\Gamma=0,\quad\frac{\partial^4\psi}{\partial\nu^4}>0,\quad\psi(x)>0 \text{ при } x\in G,$$

$f(x',t)$ — граничная функция: $u|_B=f(x',t)$ $((x',t)\in B)$, легко выводится сходимость галеркинских приближений к точному решению $u(t,x)$ задачи (1), (2), (2′) и принадлежность

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial t}\in L_2(\Omega'),\quad\frac{\partial u}{\partial t}\in L_2(0,T;L_2(G)),$$

$$\sum_k \iint\limits_{\Omega'} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^{p-2} \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right|^2 dxdt < \infty, \quad u \in L_p(0,\ T;\ \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)}), \tag{13}$$

где $\Omega' = G \times (0,\ T')$, $T' < T$.

Входящая в оценку (12) постоянная $K(h,\ f)$ зависит, вообще говоря, от h, $\frac{\partial h}{\partial t}$, f, $\frac{\partial f}{\partial t}$. Мы покажем, что в случае уравнения (1), можно получить оценку, аналогичную оценке (12), в которой, однако, постоянная K зависит только от h и не зависит от $\frac{\partial h}{\partial t}$. Таким образом, при замыкании нам удастся расширить класс правых частей.

Действительно, умножив обе части уравнения (1) на произвольную функцию $v(x,\ t) \in L_p(0,\ T;\ \overset{\circ}{W}{}_p^{(1)})$ и проинтегрировав по Ω, получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t},\ v\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[A_i(Du),\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\right] = [h,\ v]. \tag{14}$$

Введем обозначение

$$[u,\ v]' = \int\limits_0^{T'}\int\limits_G u(x,\ t)\, v(x,\ t)\, dxdt.$$

Подставим в (14) $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ и заменим интегрирование по Ω интегрированием по Ω'. Получаем

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial t}\right]' + \sum_{i=1}^{n}\left[A_i(Du),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right]' = \left[h,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right]'. \tag{15}$$

Докажем сходимость интегралов, входящих в (15). Конечность $\left[\frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial t}\right]'$ следует из (13). Далее

$$\left|\left[A_i(Du),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right]'\right| \leq C \iint\limits_{\Omega'} \left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^{p-1}\right)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right| dxdt =$$

$$= C\iint\limits_{\Omega'}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right| dxdt + C\iint\limits_{\Omega'}\sum_k \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^{\frac{p-2}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^{\frac{p}{2}}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right| dxdt \leq$$

$$\leq C\iint\limits_{\Omega'}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right| dxdt +$$

$$+ C_1\left(\iint\limits_{\Omega'}\sum_k\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^p dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint\limits_{\Omega'}\sum_k\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^{p-2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Здесь мы воспользовались порядком роста A_i на бесконечности и (13). Таким образом, сходимость второго слагаемого левой части (15) доказана. Сходимость же $\left[h, \frac{\partial u}{\partial t}\right]'$ следует также из (13). Преобразуем теперь соотношение (15)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right]' + \iint\limits_{Q^{T'}} \frac{\partial}{\partial t}(A(Du))\,dx\,dt = \left[h, \frac{\partial u}{\partial t}\right]', \tag{16}$$

откуда получаем важную для дальнейшего оценку

$$c^2\left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right]' + \int\limits_{G} A(Du)\big|_{t=T'}\,dx \leqslant C^2\,[h, h]'. \tag{17}$$

Прежде чем перейти к процессу замыкания оператора $L(u)$ относительно $h(t, x)$, получим еще одну оценку. С этой целью положим в соотношении (14) $v = ue^{-\lambda t}$, имеем

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, ue^{-\lambda t}\right]' + \sum_i \left[A_i(Du), e^{-\lambda t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]' = [h, ue^{-\lambda t}]'. \tag{18}$$

Легко видеть, что

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, ue^{-\lambda t}\right]' = \frac{e^{-\lambda T'}}{2}(u(x, T'), u(x, T')) + \frac{\lambda}{2}[u, ue^{-\lambda t}]'. \tag{19}$$

Пользуясь (7) и (8), оценим

$$\sum_i \left[A_i(D(f+u)) - A_i(Df), e^{-\lambda t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]' =$$

$$= \sum_i \int\limits_0^{T'} e^{-\lambda t}\left(\int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}A_i(D(\tau u + f))\,d\tau, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dt =$$

$$= \sum_{i,j} \int\limits_0^{T'} e^{-\lambda t}\left(\int\limits_0^1 A_{ij}(D(f+\tau u))\,d\tau\,\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_i \int\limits_0^{T'} e^{-\lambda t}\left(\int\limits_0^1 \varphi(D(f+\tau u))\,d\tau\,\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dt \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \sum_i \int\limits_0^{T'} e^{-\lambda t}\left(\int\limits_G \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx\right)dt = c_2 \int\limits_0^{T'} e^{-\lambda t}\,|u|_{1,p}^p\,dt, \tag{20}$$

где $f(t, x)$ — произвольная функция, принадлежащая пространству $L_p(0, T'; W_p^{(1)})$. Из (19), (20) и (16), получим требуемую оценку

$$\frac{e^{-\lambda T'}}{2}(u(x, T'), u(x, T')) + \frac{\lambda}{2}[u, ue^{-\lambda t}]' + C_2\int\limits_0^{T'} e^{-\lambda t}\,|u|_{1,p}^p\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{\partial u}{\partial t},\ ue^{-\lambda t}\right]' + \sum_i \left[A_i(D(u+f)) - A_i(Df),\ e^{-\lambda t}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]' \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{T'} e^{-\lambda t}(K_1 |h|^q_{0,q} + K_2 |u|^p_{1,p})\,dt. \tag{21}$$

Перейдем теперь к процессу замыкания оператора $L(u)$ относительно $h(t, x)$. Пусть $h_n(t, x)$ — последовательность функций, удовлетворяющая условиям теоремы существования и единственности, причем

$$\int_0^{T'} |h_n - h_k|^2_{0,2}dt \to 0 \text{ при } n,\ k \to \infty. \tag{22}$$

Этой последовательности правых частей соответствует последовательность решений $u_n(t, x)$, удовлетворяющих соотношению

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial t},\ v\right]' + \sum_i \left[A_i(Du_n),\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\right]' = [h_n,\ v]'. \tag{23}$$

Вычитая почленно из (23) такое же соотношение с заменой n на k, v — на $(u_n - u_k)e^{-\lambda t}$ и, пользуясь (21), получим следующую оценку:

$$\frac{\lambda}{2}[u_n - u_k,\ (u_n - u_k)e^{-\lambda t}]' + \int_0^{T'} e^{-\lambda t}(C_3 |u_n - u_k|^p_{1,p})\,dt \leqslant \left[\frac{\partial(u_n - u_k)}{\partial t},\right.$$

$$\left.(u_n - u_k)e^{-\lambda t}\right]' + \sum_i \left[A_i(Du_n) - A_i(Du_k),\ \frac{\partial(u_n - u_k)}{\partial x_i}e^{-\lambda t}\right]' \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t}|h_n - h_k|^q_{0,q}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t}|u_n - u_k|^p_{1,p}dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\frac{a^2_{n,k} + b^p_{n,k}}{b_{n,k}} \leqslant \tilde{C}\left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t}|h_n - h_k|^q_{0,q}dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{23*}$$

Из (22) и (23*) следует, что

$$\lim_{n,k\to\infty} a_{n,k} = \lim_{n,k\to\infty} b_{n,k} = 0,$$

где

$$a_{n,k} = [u_n - u_k,\ (u_n - u_k)e^{-\lambda t}]'^{\frac{1}{2}},\quad b_{n,k} = \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t}|u_n - u_k|^p_{1,p}dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ в пространстве $L_p(0,\ T';\ \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_p)$. Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|^p_{1,p} = 0. \tag{24}$$

Оценим теперь

$$|A_i(Du)-A_i(Du_n)|=\left|\sum_k\int_0^1 A_{ik}(Du_n+\tau D(u-u_n))\,d\tau D_k(u-u_n)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\Big(1+\sum_i|D_iu_n|^{p-2}+\sum_i|D_i(u-u_n)|^{p-2}\Big)\Big(\sum_i|D_i(u-u_n)|\Big),$$

откуда при $p\geqslant 2$

$$\int_0^{T'}|A_i(Du)-A_i(Du_n)|^q_{0,q}d\tau\leqslant c^q\iint_{Q}\Big(1+\sum_i|D_iu_n|^{p-2}+$$

$$+\sum_i|D_i(u-u_n|^{p-2}\Big)^q\Big(\sum_i|D_i(u-u_n)|\Big)^q dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_4\left\{\iint_{Q'}\Big(1+\sum_i|D_iu_n|^{p-2}+\sum_i|D_i(u-u_n|^{p-2}\Big)^{q\frac{p-1}{p-2}}dxdt\right\}^{\frac{p-2}{p-1}}\times$$

$$\times\left\{\iint_{Q'}\sum_i|D_i(u-u_n)|^p\,dxdt\right\}^{\frac{1}{p-1}}\leqslant$$

$$\leqslant C_5\left\{\int_0^{T'}\Big(1+|u_n|^p_{1,p}+|u-u_n|^p_{1,p}\Big)d\tau\right\}^{\frac{p-2}{p-1}}\left\{\int_0^{T'}|u-u_n|^p_{1,p}\,d\tau\right\}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{25}$$

Согласно (24), отсюда следует, что левая часть (25) стремится к нулю. Из (17) следует (с помощью (24)), что равномерно ограничены $\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{0,2}\leqslant C$. Переходя к пределу в (23), получаем, что функция $u(t,x)=\lim\limits_{n\to\infty}u_n(t,x)$ является решением задачи (1), (2), (2′). Пользуясь априорной оценкой (17), получаем слабую в L_2 сходимость $\frac{\partial u_n}{\partial t}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть оператор* $\mathrm{L}(u)$ *удовлетворяет условиям* I, *II, III. Тогда для правых частей* $h(t,x)\in L_2(Q')$ *существует единственное решение* $u(t,x)\in L_p(0,T';\overset{0}{W}{}_p^{(1)})$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in L_2(0,T';L_2(G))$ *задачи* (1), (2), (2′), *удовлетворяющее соотношению* (14), *при том выполнена априорная оценка* (17).

Перейдем к рассмотрению уравнений, содержащих подчиненные члены, а именно, рассмотрим уравнение вида

$$\mathrm{L}(u)+V(u)=h, \tag{1′}$$

где

где

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(Du), \tag{26}$$

$$V(u) \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u) + V_0(t, x, u). \tag{27}$$

Пусть оператор $L(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Для уравнения (1′) рассмотрим задачу (2), (2′). Для доказательства однозначной разрешимости поставленной задачи, следуя идеям работы М. И. Вишика [2], докажем сначала подчиненность оператора $V(u)$, точнее его полную непрерывность.

Обозначим через $H(\Omega)$ пространство функций $u(t, x) \in L_p(0, T; W_p^{(1)})$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_H = \left(\iint_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \|u\|_{1,p}^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{28}$$

Лемма 1. *Пусть $p \geqslant 2$ и функции $V_i(t, x, \xi)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, то есть они непрерывны по ξ при почти всех $(t, x) \in \Omega$ и измеримы по t, x при всех значениях ξ. Пусть, далее, существует функция $f(t, x) \in L_{p'}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ такая, что*

$$|V_i(t, x, u)| \leqslant f(t, x) \text{ для } (t, x) \in \Omega, \ (i = 1, \cdots, n). \tag{29}$$

Тогда операторы

$$B_i(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u)$$

с областью определения $H(\Omega)$ и областью значений $L_{p'}(0, T; W_{p'}^{(-1)})$ вполне непрерывны.

Доказательство. Операторы $B_i(u)$ непрерывны. Действительно, пусть $\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_H = 0$, тогда по теореме В. В. Немыцкого [4] $V_i(t, x, u_n) \to V_i(t, x, u)$ по мере в Ω.

Кроме того, в силу (29), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\iint_e |V_i(t, x, u_n)|^{p'} dxdt \leqslant \iint_e |f(t, x)|^{p'} dxdt < \varepsilon \tag{30}$$

при $\operatorname{mes} e < \delta$. Из (29) и (30) следует

$$\lim_{n \to \infty} \|V_i(t, x, u_n) - V_i(t, x, u)\|_{0, p'} = 0. \tag{31}$$

Далее

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u) \right\|_{-1, p'} =$$

$$= \sup_{v \in L_p(0, T; W_p^{(1)})} \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u), v \right\rangle}{\|v\|_{1, p}} \leqslant$$

$$\leqslant \| V_i(t, x, u_n) - V_i(t, x, u)\|_{0, p'} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

откуда и вытекает непрерывность операторов $B_i(u)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, ($\langle l, v \rangle$ означает значение линейного функционала l на элементе v).

Теперь докажем полную непрерывность операторов $B_i(u)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — ограниченное множество в пространстве $H(\Omega)$, тогда, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева [3], оно будет компактно в пространстве $L_2(\Omega)$ и, следовательно, из него можно выбрать подпоследовательность $\{u_n\}$, сходящуюся в $L_2(\Omega)$. Отсюда, точно так же, как и выше, убеждаемся, что $B_i(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} B_i(u)$ в $L_{p'}(0, T; W_{p'}^{(-1)})$, что и доказывает полную непрерывность операторов $B_i(u)$ $(i = 1, \cdots, n)$. Полная непрерывность оператора $B_0(u) = V_0(t, x, u)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1′), (2), (2′). С этой целью получим априорную оценку для возможных ее решений. Рассмотрим квадратичную форму

$$F(u, u) = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, u\right] + \sum_{i=1}^{n} \left[A_i(Du), \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[V_i(t, x, u), \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + [V_0(t, x, u) - h(t, x), u(t, x)].$$

Если $u(t, x)$ — решение задачи (1′), (2), (2′), удовлетворяющее неравенству

$$F(u, u) > c^2 \|u\|_{1, p}^p - C, \tag{32}$$

где $c > 0$, $C > 0$ не зависят от u, то, учитывая, что $F(u, u) = 0$, из (32) получаем априорную оценку для ее возможных решений

$$\|u\|_{1, p}^p \leqslant \frac{C}{c^2} = M. \tag{33}$$

Таким образом, достаточно доказать справедливость неравенства (32). Не нарушая общности, можно предположить, что $A_i(0) = 0$, $(i = 1, \cdots, n)$. Оценим

$$\sum_{i=1}^{n} \left(A_i(Du), \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(A_i(Du) - A_i(0), \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{d}{d\tau} A_i(D(\tau u))\, d\tau, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \left(\sum_{i, k} \int_0^1 A_{ik}(D(\tau u))\, d\tau \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) >$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{0}^{1} \varphi(\tau Du)\, d\tau \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \geqslant c_1 \| u \|_{1,p}^{p}. \tag{34}$$

При выводе оценки (34) мы воспользовались условием (7) и оценкой Л. Н. Слободецкого [5]:

$$\| u \|_{m,p}^{p} = \sum_{|\beta| \leqslant m} \int_{G} |D^{\beta} u|^{p} dx \leqslant C_0 \sum_{i=1}^{n} \int_{G} \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right|^{p} dx,$$

где $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^{(m)}(G)$.

Пусть, далее, выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[V_i(t, x, u), \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + [V_0(t, x, u) - h(t, x), u] \geqslant -(c_1 - c^2) \| u \|_{1,p}^{p} - C, \tag{35}$$

где c, c_1, C — положительные постоянные, причем c_1 то же, что и в (34). Тогда из (34) и (35) получаем

$$0 = F(u, u) \geqslant \frac{1}{2}(u(x, T), u(x, T)) + c_1 \| u \|_{1,p}^{p} - (c_1 - c^2) \| u \|_{1,p}^{p} -$$

$$- C \geqslant c^2 \| u \|_{1,p}^{p} - C$$

и, следовательно, верна априорная оценка (33). Таким образом, доказана следующая лемма

Лемма 2. *Если главная часть* $L(u)$ *уравнения* (1′) *удовлетворяет условию* (7) *или* (34), *а для подчиненных членов справедлива оценка* (35), *причем в* (34) *и* (35) c_1 *одно и то же, то для решений* $u(t, x)$ *справедлива априорная оценка* (33).

Теорема 2. *Пусть оператор* $L(u)$ *удовлетворяет условиям I, II, III, а оператор* $V(u)$ — *условиям леммы 2. Пусть, кроме того, любое решение уравнения*

$$L(u) + tV(u) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{36}$$

имеет норму, не превосходящую M:

$$\| u \|_{1,p} \leqslant M, \tag{37}$$

где M *не зависит от* t. *Тогда уравнение* (1′) *или задача* (1′), (2), (2′) *имеет по крайней мере одно решение* $u \in H(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение

$$L(u) = h, \quad u \in H(\Omega), \quad h \in L_2(\Omega). \tag{38}$$

В силу теоремы 1 уравнение (38) однозначно разрешимо. Обозначим его решение

$$u = R(h), \tag{39}$$

где $R = L^{-1}$. Докажем непрерывность оператора R. Пусть $L(u_1) = h_1$, $L(u_2) = h_2$, тогда, аналогично неравенству (34), имеем

$$\langle \mathrm{L}(u_2) - \mathrm{L}(u_1),\ u_2 - u_1 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left[A_i(Du_2) - A_i(Du_1),\ \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial x_i} \right] \geqslant$$

$$\geqslant c \| u_2 - u_1 \|_{1,p}^{p}. \tag{40}$$

С другой стороны,

$$| \langle \mathrm{L}(u_2) - \mathrm{L}(u_1),\ u_2 - u_1 \rangle | \leqslant \| h_2 - h_1 \|_{0,2} \| u_2 - u_1 \|_{1,p}. \tag{41}$$

Из (40) и (41) следует

$$\| u_2 - u_1 \|_{1,p}^{p-1} \leqslant c_3 \| h_2 - h_1 \|_{0,2},$$

откуда и вытекает непрерывность оператора $R(u)$. Вернемся к уравнению (36). Вместо него рассмотрим вспомогательное уравнение относительно u

$$\mathrm{L}(u) = -tV(w), \quad u,\ w \in L_p(0,\ T;\ W_p^{(1)}).$$

Согласно (38) и (39) имеем

$$u = R(-tV(w)) \equiv R_t(w).$$

Таким образом, доказательство разрешимости задачи (1′), (2), (2′) сводится к доказательству существования неподвижной точки у оператора $R_1(u) = R(-V(u)$. Операторы $R_t(u)$ вполне непрерывны. В самом деле, V — вполне непрерывен по условию, а оператор R, как мы только что показали, непрерывен. При $t = 0$ $R_0(w) = 0$, так как при $h = 0$ единственным решением уравнения (38) является $u = 0$. Отсюда следует, что степень покрытия нуля при отображении $u \to u - R_0(u)$ равна 1. На сфере радиуса $2M$: $\| u \|_{1,p} = 2M$, $u - R_t(u) \neq 0$, так как согласно условию (37) все решения уравнения (36) имеют норму, не превосходящую M. Следовательно, степень покрытия нуля при отображении $u - R_t(u)$ шара $\| u \|_{1,p} \leqslant 2M$ не зависит от t, и поскольку при $t = 0$ она равна 1, то при $t = 1$ она тоже равна единице, откуда следует существование такого u, что $u - R_1(u) = 0$. Теорема доказана.

Резюмируя, получим следующий результат.

Теорема 3. *Если оператор* $\mathrm{L}(u)$ *удовлетворяет условиям I, II, III, а оператор* $V(u)$ — *условиям лемм 1, 2, то задача* (1′), (2), (2′) *имеет по крайней мере одно решение* $u \in H(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 2. Так как по условию теоремы 2 выполнено неравенство (35), то имеем

$$t \langle V(u),\ u \rangle \geqslant -(c_1 - c^2) \| u \|_{1,p}^{p} - C,$$

причем предполагается, что $c^2 < c_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Все остальные условия теоремы 2 выполняются автоматически. Теорема доказана.

Докажем единственность решения задачи (1′), (2), (2′).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, для любых* $u_1(t,\ x)$, $u_2(t,\ x) \in L_p(0,\ T;\ W_p^{(1)})$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[V_i(t,\ x,\ u_1)-V_i(t,\ x,\ u_2),\ \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\right]+$$

$$+\left[V_0(t,\ x,\ u_1)-V_0(t,\ x,\ u_2),\ u_1-u_2\right]\geqslant -c_7\|u_1-u_2\|_{1,p}^{p},$$

где $0<c_7<c$, *тогда задача* (1'), (2), (2') *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть $u_1(t,\ x)$, $u_2(t,\ x)$ — два решения задачи, тогда их разность u_1-u_2 удовлетворяет соотношению

$$0=\left[\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial t},\ u_1-u_2\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[A_i(Du_1)-A_i(Du_2),\ \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[V_i(t,\ x,\ u_1)-V_i(t,\ x,\ u_2),\frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial x_i}\right]+$$

$$+\left[V_0(t,\ x,\ u_1)-V_0(t,\ x,\ u_2),\ u_1-u_2\right]\geqslant\frac{1}{2}\left(u_1-u_2,\ u_1-u_2\right)\Big|_{t=T}+$$

$$+c_8\|u_1-u_2\|_{1,p}^{p},\quad c_8>0.$$

При выводе оценки (43) мы воспользовались неравенством (40) и условием (42) теоремы. Из неравенства (43) следует, что $u_1\equiv u_2$. Теорема доказана.

В заключение пользуюсь случаем принести глубокую благодарность профессору М. И. Вишику за внимание к моей работе.

Московский энергетический
институт

Поступила 25 IV 1964

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

ԱՌԱՋԻՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՔՎԱԶԻ-ԳԾԱՅԻՆ ՊԱՐԱԲՈԼԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է առաջին եզրային խնդիրը երկրորդ կարգի քվազիգծային պարաբոլիկ հավասարումների համար, որոնց գլխավոր մասն ունի պոտենցիալ տեսք, իսկ գործակիցների աճման կարգը անվերջությունում չի գերազանցում $p-1$ $(p-1\geqslant 1)$.

Գործակիցների և աջ մասի վրա դնելով որոշակի սահմանափակումներ, որոնցից էականը հանդիսանում է հավասարման տարածական մասի կիսասահմանափակությունը, ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը համապատասխան տարածություններում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Математический сборник, 59, (дополнительный), 1962.
2. *Вишик М. И.* Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму. Труды Моск. мат. общества, 12, 1963.
3. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд. ЛГУ, 1950.
4. *Немыцкий В. В.* Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Математический сборник, 41, 1934.
5. *Слободецкий Л. Н.* Оценки решений эллиптических и параболических систем. ДАН СССР, 120, № 3. 1958.