

МАТЕМАТИКА

В. А. ГУСЕВ

ОБ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛА КОШИ ДЛЯ
 МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Г. К. Мойсил в своей работе [1] построил аналог формулы Коши для некоторых частных видов гиперкомплексных моногенных функций. В настоящей работе выводится аналог формулы Коши для некоторых иных видов таких функций и, в частности, получено интегральное представление для бианалитических функций (о них см. Балк М. Б. [2, 3]).

§ 1. Пусть $z = x + iy$, $p(z) = \sum_{i=1}^n p_i(z) \varepsilon_i$, где $p_i(z)$ — комплексная функция действительных переменных x, y класса $C^1(D)$ для некоторой односвязной области D ; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ($\varepsilon_1 = 1$) — база некоторой ассоциативной коммутативной алгебры A с единицей над полем комплексных чисел. Предполагаем, что в D существует $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1}$ или $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{-1}$.

Следуя В. С. Федорову [4—6] назовем функцию $f(x, y)$ моногенной по p в D , если в этой области найдется такая функция $\varphi(x, y)$, обозначаемая $\frac{df}{dp}$, что $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{df}{dy} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial y}$.

Теорема 1. Пусть найдется такая точка $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, что

$$1^\circ \frac{1}{p - p_0} \text{ существует в области } D \text{ с исключенной точкой } z_0, \\
(p = p(z), p_0 = p(z_0)),$$

2° в точке z_0 для всякого действительного φ имеем

$$F(\varphi, z_0) = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}^1 L_j(\varphi) & \dots & \sum_{j=1}^m a_{mj}^1 L_j(\varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{1j}^m L_j(\varphi) & \dots & \sum_{j=1}^m a_{mj}^m L_j(\varphi) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$L_j(\varphi) = a_j \cos \varphi + b_j \sin \varphi, \quad a_j = \left(\frac{\partial p_j}{\partial x} \right)_{z_0}, \quad b_j = \left(\frac{\partial p_j}{\partial y} \right)_{z_0}, \quad j = 1, \dots, m$$

a_{ij}^t ($i, j, t = 1, \dots, m$) — комплексные постоянные в таблице умножения элементов базы $z_1, \dots, z_m$ данной алгебры:

$$z_i z_j = \sum_{t=1}^m a_{ij}^t z_t.$$

Тогда для всякой функции $f(x, y)$, моногенной по $p(x, y)$ в D получим

$$\oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = \begin{cases} 0, & \text{точка } z_0 \text{ вне } C \\ K(x_0, y_0) f(x_0, y_0), & z_0 \text{ внутри } C, \end{cases} \quad (1)$$

где C — кусочногладкая простая замкнутая кривая внутри D , содержащая точку z_0 внутри или вне себя;

$$K(x_0, y_0) = \oint_C \frac{dp^0}{p - p_0}.$$

Доказательство. Полагаем $\Delta p = \sum_{j=1}^m \Delta p_j z_j = p(z) - p(z_0)$. Пусть

D_0 — круг с центром в точке z_0 радиуса R , $\bar{D}_0 \subset D$, D_1 — ограниченная замкнутая область, содержащая круг D_0 и расположенная строго внутри D ; $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$. Тогда $\Delta p_j = a_j \rho \cos \varphi + b_j \rho \sin \varphi + \omega_j \rho$, где $\omega_j \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Очевидно, что $|\Delta p_j| < c_j \rho$, $c_j = \text{const} > 0$ для $z \in D_1$. По условию $\frac{1}{p - p_0}$ в области D с исключенной точкой z_0

существует. Найдем такой элемент $\tau = \sum_{k=1}^m \tau_k z_k \in A$, чтобы $\Delta p \cdot \tau = 1$; отсюда придем к системе

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \tau_k \sum_{j=1}^m a_{kj}^1 \Delta p_j = 1 \\ \sum_{k=1}^m \tau_k \sum_{j=1}^m a_{kj}^t \Delta p_j = 0 \quad t = 2, \dots, m \end{cases}$$

с определителем $\Delta = \rho^m [F(\varphi, z_0) + \omega]$, где $\omega \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Так как по условию $F(\varphi, z_0) \neq 0$, то

$$2\mu = \min_{0 < \varphi < 2\pi} |F(\varphi, z_0)| > 0. \quad (2)$$

Пусть радиус R столь малый, чтобы иметь для $z \in D_0$:

$$|\omega| < \mu. \quad (3)$$

* Этот интеграл не зависит от выбора указанной кривой C , окружающей точку z_0 [5].

Из (2) и (3) следует, что в круге $\bar{D}_0$ имеем для $z \neq z_0$:

$$|\Delta| > \mu \rho^m, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

откуда, очевидно, $|\tau_h| < \frac{\tilde{c}_h}{\mu \rho}$, где $\tilde{c}_h = \text{const} > 0$, $h = 1, \dots, m$. Поэтому

$|\tau| < \frac{\Gamma}{\rho}$, где $\Gamma = \text{const} > 0$, то есть

$$\left| \frac{1}{p - p_0} \right| < \frac{\Gamma}{\rho}. \quad (4)$$

Кроме того, в области $\bar{D}_0$ (с исключенной точкой z_0) $\frac{1}{p - p_0}$ будет моногенной по p [5] и, следовательно,

$$\bar{J}_C \equiv \oint_C \frac{dp}{p - p_0} = \oint_\gamma \frac{dp}{p - p_0} \equiv \bar{J}_\gamma,$$

где γ — окружность радиуса ρ с центром в точке z_0 , причем γ внутри C и внутри круга D_0 . Интеграл $\bar{J}_C$ есть функция от z_0 . Обозначив

$J_C = K(x_0, y_0)$, получим $\oint_C \frac{dp}{p - p_0} = K(x_0, y_0)$. Пусть $f(x, y)$ моно-

генна по p , тогда $\frac{f}{p - p_0}$ будет моногенна по p в D с исключенной точкой z_0 . Поэтому для любого контура $C \subset D$ (контур C содержит точку z_0 внутри или вне себя) и для любой окружности γ с центром в точке z_0 и радиуса ρ , заключенной внутри C и в круге $\bar{D}_0$, имеем

$$1) J_C \equiv \oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = \oint_\gamma \frac{f dp}{p - p_0} \equiv J_\gamma, \text{ если } z_0 \text{ внутри } C,$$

$J_C = 0$, если z_0 вне C .

$$2) \lim_{\rho \rightarrow 0} J_\gamma = f(x_0, y_0) \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_\gamma \frac{dp}{p - p_0} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_\gamma \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{p - p_0} dp$$

Из (4) и очевидного неравенства $\oint_\gamma |dp| < \tilde{c}_0 \rho$, $\tilde{c}_0 = \text{const}$ следует

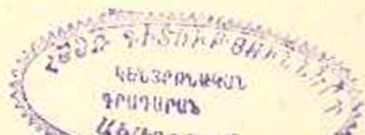
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_\gamma \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{p - p_0} dp = 0,$$

откуда и следует (1).

Теорема доказана.

Замечание 1. Рассмотрим в качестве примера алгебры A такую алгебру $\bar{A}$ второго ранга с базой $1, \varepsilon$, что $\varepsilon^2 = \nu$, где ν — некоторое комплексное число.

Получим $p = p_1 + \varepsilon p_2$. Тогда имеем



$$F(\varphi, z_0) = (a_1^2 - va_2^2) \cos^2 \varphi + 2(a_1 b_1 - va_2 b_2) \cos \varphi \sin \varphi + (b_1^2 - vb_2^2) \sin^2 \varphi,$$

откуда, очевидно, следует, что теорема 1 имеет место в случае

$$a_1^2 - va_2^2 \neq 0, \quad b_1^2 - vb_2^2 \neq 0, \quad \operatorname{Im} \frac{b_1 \pm \sqrt{v} b_2}{a_1 \pm \sqrt{v} a_2} \neq 0,$$

если $\Delta p_1^2 - v \Delta p_2^2 \neq 0$ для $z \neq z_0$.

Следствие. Если алгебра A рассматривается над полем действительных чисел, то из замечания 1 следует, что теорема 1 может иметь место только в том случае, когда алгебра $\bar{A}$ изоморфна алгебре обыкновенных комплексных чисел и получим известную формулу Коши.

Замечание 2. Пусть $p = z + iz$, $f = u + iv$, где $z^2 = 0$, u, v — комплексные функции x, y , тогда p удовлетворяет условию теоремы 1, и если f моногенна по p в D , то

$$\oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = h(x_0, y_0) f(x_0, y_0), \quad h(x_0, y_0) = \oint_C \frac{dp}{p - p_0},$$

причем, легко показать,

$$\oint_C \frac{dp}{p - p_0} = 2\pi i,$$

откуда

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f dp}{p - p_0}.$$

Но функция $f = u + iv$, моногенная по $p = z + iz$ имеет вид [6]: $f(x, y) = u(z) + i[\psi(z) + z u'(z)]$, где $u(z), \psi(z)$ — аналитические, тогда

$$\oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = \begin{cases} 2\pi i [u(z_0) + i[\psi(z_0) + z_0 u'(z_0)]] & z_0 \text{ внутри } C \\ 0 & z_0 \text{ вне } C \end{cases}$$

§ 2. Пример интеграла типа Коши

Сохраняя все введенные обозначения (замечание 2), назовем интегралом типа Коши интеграл вида $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f dp}{p - p_0}$, где $f = u + iv$ — какая-нибудь непрерывная функция на контуре C , $p = z + iz$, $z^2 = 0$. Полагая

$$f_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f dp}{p - p_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{u dz}{z - z_0} + \left(\frac{u d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{u(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{v d\bar{z}}{z - z_0} \right) \right\}.$$

Тогда, как известно, можем положить

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u dz}{z - z_0} = \varphi(z_0), \quad \frac{\bar{z}_0}{2\pi i} \oint_C \frac{u dz}{(z - z_0)^2} = \bar{z}_0 \varphi'(z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{u \bar{z}}{(z - z_0)^2} dz + \frac{v d\bar{z}}{z - z_0} \right\} = \psi(z_0),$$

где $\varphi(z_0)$, $\psi(z_0)$ — аналитические функции внутри и вне C , и получим

$$f_1(z_0) = \varphi(z_0) + z_0 [\psi(z_0) + \bar{z}_0 \varphi'(z_0)], \quad (5)$$

то есть, как легко видеть, в этом примере функция $f_1(z_0)$ будет моногенной по $p = z_0 + z \bar{z}_0$ внутри и вне контура C . [Небезинтересно отметить, что из формулы (5) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{u(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{v d\bar{z}}{z - z_0} \right\} = \psi(z_0) + \bar{z}_0 \varphi'(z_0),$$

где в правой части имеем так называемую бианалитическую функцию [2, 3].

§ 3. Пусть $f(x, y) \in C'(D)$ — моногенная по $p = z(z) + z\theta(\bar{z})^*$ ($z^2 = 0$) в односвязной области D с границей Γ и непрерывна на Γ .

Обозначим $r = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$$\varphi_1 = \frac{x - x_0}{r^2} = \frac{\partial \ln r}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{y - y_0}{r^2} = \frac{\partial \ln r}{\partial y}.$$

Тогда

$$\varphi_1 - i\varphi_2 = \frac{1}{z - z_0}, \quad \varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right). \quad (6)$$

Пусть

$$P = - \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) f, \quad Q = \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) f.$$

Рассмотрим область $D_0 = D - D_0$, где D_0 — замкнутый круг радиуса ρ с центром в точке z_0 и границей Γ_0 ($\bar{D}$ расположен строго внутри D).

По формуле Грина будем иметь (предполагая допустимость формулы Грина для D_0):

$$\int_{\partial D_0} P dx + Q dy = \int_{D_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} dx dy.$$

* $z(z) + \theta(\bar{z})$ — аналитическая функция от $z(\bar{z})$.

Откуда

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + \iint_{\tilde{D}} \left\{ \tau_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \tau_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\} dxdy.$$

В силу моногенности f по p имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

и, полагая $(\nabla p)^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2$, получим

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + \iint_{\tilde{D}} \tau_1 \frac{df}{dp} (\nabla p)^2 dxdy. \quad (7)$$

Имеем $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha' + i\theta'$, $\frac{\partial p}{\partial y} = i\alpha' - i\theta'$, откуда $(\nabla p)^2 = 4\alpha'\theta'$. Кроме того

$$Pdx = -[\varphi_1(i\alpha' - i\theta') + \varphi_2(\alpha' + i\theta')] f dx = \\ = -i(\varphi_1(\alpha' - \theta') - i\varphi_2(\alpha' + i\theta')) f dx.$$

$$Qdy = [\varphi_1(\alpha' + i\theta') - \varphi_2(i\alpha' - i\theta')] f dy = \\ = -i[i\varphi_1(\alpha' + i\theta') + \varphi_2(\alpha' - \theta')] f dy.$$

$$Pdx + Qdy = -if[\varphi_1\alpha'(dx + idy) - \varphi_1\theta'(dx - idy) - \\ - i\varphi_2\alpha'(dx + idy) - i\varphi_2\theta'(dx - idy)] =$$

$$= -if[(\varphi_1 - i\varphi_2)d\alpha - i(\varphi_1 + i\varphi_2)d\theta] = -i \left\{ \frac{fd\alpha}{z - z_0} - i \frac{fd\theta}{z - z_0} \right\}.$$

На окружности $\Gamma: z - z_0 = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} - \bar{z}_0 = \rho e^{-i\theta}$, $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$,

$$d\theta = \theta' dz = -\rho \theta' i e^{-i\theta} d\bar{z}, \quad \frac{d\alpha}{z - z_0} = i\alpha' d\bar{z}, \quad \frac{d\theta}{z - z_0} = -i\theta' d\bar{z}.$$

Откуда, в пределе при $\rho \rightarrow 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(x_0, y_0) (\alpha'(z_0) + i\theta'(z_0)) = f(x_0, y_0) \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Поэтому формула (7) в пределе примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{fd\alpha}{z - z_0} - i \int_{\Gamma} \frac{fd\theta}{z - z_0} \right\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{\pi} \iint_{\tilde{D}} \tau_1 \frac{df}{dp} \alpha' \theta' dxdy + \\ + f(x_0, y_0) \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x}$$

и, в силу (6)

$$f(x_0, y_0) \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{f dz}{z - z_0} - z \frac{f d\bar{z}}{z - \bar{z}_0} \right\} - \\ - \frac{z}{\pi} \iint_D \frac{df}{dp} \alpha' \theta' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy,$$

где

$$\iint_D \frac{df}{dp} \alpha' \theta' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy = \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{D_{r0}} \frac{df}{dp} \alpha' \theta' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy.$$

Рассмотрим случай $p = z + z\bar{\theta}(z)$. Тогда

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

и будем иметь:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(x, y) dz^*}{z - z_0}, \\ v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{v dz}{z - z_0} - \frac{u d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} - \theta'(\bar{z}) \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} \right\} - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{du}{dz} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) \theta' dx dy$$

а, в частности, при $\theta(\bar{z}) \equiv \bar{z}$ получим

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{v dz}{z - z_0} - \frac{u d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} - \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} \right\} - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{du}{dz} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy.$$

В этом случае $v(x, y) = \psi(z) + z u'(z)$ и мы получили другой вид интегрального представления для бианалитической функции.

* $f = u + iv$ (§ 1).

Վ. Ա. ԳՈՒՍԵՎ

ՄՈՆՈԳԵՆ ՅՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՍՄԱՐ ԿՈՇՈՒ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԱՎՈԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ներկա աշխատության մեջ հետազոտվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում տեղի ունի Կոշու հայտնի բանաձևը երկու իրական փոփոխականների (§ 1) մոնոգոն հիպերկոմպլեքսային ֆունկցիաների համար:

Դիտարկվում է Կոշու տիպի ինտեգրալի մի օրինակ նշված ֆունկցիաների (§ 2) համար, ստացված են նաև ինտեգրալ ներկայացումներ բիանալիտիկ ֆունկցիաների համար (վերջիններին մասին տես Մ. Բ. Բալկ [2, 3]):

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Moisil Gr. C. Metoda functiilor de variabilă ipercomplexă în idrodinamica plană a lichidelor vâscoase incompresibile. Studii și Cercetări Mat. Acad. RPR, I, 1, 1950, 9—35.
2. Балк М. Б. Теорема Пикара для целых бивалентных функций. ДАН СССР, 152, № 6, 1963, 1282—1285.
3. Балк М. Б. Вырожденные бивалентные отображения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964, 9—15.
4. Федоров В. С. Об одном виде гиперкомплексных моногенных функций. Математ. сборник, 50(92), 1960, 101—108.
5. Федоров В. С. Основные свойства обобщенных моногенных функций. Известия ВУЗ-ов, Математика, № 6 (7), 1958, 257—265.
6. Морев И. А. Об одном обобщении понятия моногенных функций. Математ. сб., 42(84), 1957, 197—206.