ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 3, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

М. Б. БАЛК

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть D — некоторая область плоскости комплексного переменного z (для простоты будем в дальнейшем считать D односвязной). Через $\bar{z}$ будем обозначать число, сопряженное числу z, так что если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$.

Функция $w = f(z)$ называется *полианалитической функцией порядка n (или n-аналитической функцией)* в области D, если она в D представима в виде:

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}\varphi_{n-1}(z), \tag{1}$$

где все функции $\varphi_k(z)$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ аналитичны в D. Полианалитические функции порядка 1—это аналитические функции. Понятно, что полианалитическая функция порядка n может рассматриваться также, как полианалитическая функция порядка m при любом $m > n$ (здесь полная аналогия с определением степени полинома). Например, функция $w = (z - \bar{z})/(2i)$ является полианалитической порядка 2; и в то же время ее можно рассматривать как полианалитическую функцию порядка 3, 4, 5,...

Характеристическим свойством функции $w = f(z)$, n-аналитической в D, является то, что она удовлетворяет в D следующему равенству (обобщенному условию Коши — Римана):

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0. \tag{2}$$

Нетрудно понять, что всякую функцию $w = f(z)$, n-аналитическую в области D, возможно в некоторой окрестности $\delta(a)$ каждой точки a из D представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{z} - \bar{a})^k \varphi_k(a; z), \tag{3}$$

где $\varphi_k(a; z)$ — аналитическая функция переменного z $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$.

Изучением полианалитических функций впервые занимались П. Бургатти [1] и Н. Теодореску [2]. Заметим, что в работах последнего эти функции обычно называются ареолярными полиномами.

2. Пусть теперь в области D заданы две n-аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$. Эти функции могут совпадать на каком-то множестве E, имеющем точку сгущения внутри D, но все же не совпадать во всей области D. Например, функции $f(z) \equiv (z - \bar{z})/(2i)$ и $g(z) \equiv (z + \bar{z})^2/4$ обе полианалитичны (порядка 3) на всей z-плоскости, совпадают на параболе $y = x^2$, но тем не менее не тождественны. Спрашивается: что достаточно потребовать от множества E (имеющего точку сгущения внутри D), чтобы из совпадения $f(z)$ и $g(z)$ на E вытекало тождество функций $f(z)$ и $g(z)$ всюду в D?

Ответ на этот вопрос был нами сформулирован в [3] в виде теоремы единственности для полианалитических функций. Здесь мы эту теорему докажем и выведем из нее некоторые следствия.

С. Ц. Саркисян [4] впервые обнаружил, что установленные в данной статье результаты могут быть использованы для изучения свойств решений некоторых уравнений Коши-Римана с нелинейными правыми частями, то есть некоторых уравнений вида

$$\partial w/\partial \bar{z} = f(z, w).$$

3. Пусть E—произвольное множество точек плоскости комплексного переменного z; a—какая-либо точка (не обязательно из E); l—луч, исходящий из точки a. Пусть уравнение этого луча таково: $\arg(z - a) = \alpha$. Множество E назовем *сгущающимся к точке a вдоль луча l*, если в E содержится такая последовательность точек $\{z_n\}$, что при

$$n \to \infty \quad \lim z_n = a \quad \text{и} \quad \lim \operatorname{Arg}(z_n - a) = \alpha. \tag{4}$$

Иначе можно так сказать: E сгущается к точке a вдоль луча l, если всякий угол с вершиной в точке a, содержащий внутри себя луч l, содержит также такую часть множества E, для которой a является предельной точкой.

Пусть теперь λ—произвольная прямая, проходящая через точку a. Множество E назовем *сгущающимся к точке a вдоль прямой λ*, если оно сгущается к a хотя бы вдоль одного из лучей, на которые разбивается прямая λ точкою a. Последнее определение можно так перефразировать: множество E называется сгущающимся к точке a вдоль прямой λ: $z = a + t\exp(i\alpha)$ (t и α вещественны, $-\infty < t < \infty$, $0 \leqslant \alpha < \pi$), если E содержит такую последовательность точек $z_n = a + t_n \exp(i\alpha_n)$ (t_n и α_n вещественны), что при $n \to \infty$ $t_n \to 0$ и $\alpha_n \to \alpha$.

Точку a назовем *точкой сгущения порядка k для множества E*, если E сгущается к точке a не менее, чем вдоль k различных прямых. Если при этом не существует $k+1$ прямых, вдоль которых множество E сгущалось-бы к a, то говорим, что *точка сгущения a имеет точный порядок k*.

Так, например, начало координат является точкой сгущения точного порядка 1 для синусоиды $y = \sin x$, точкой сгущения точного порядка 2 для лемнискаты $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$, точкой сгущения бесконечного порядка для кривой $y = x\sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

4. *Лемма 1. Если функция $\Phi(z)$, полианалитическая порядка n в некотором круге $\delta\{|z-a|<\rho\}$, обращается в нуль на множестве E, для которого центр a круга δ служит точкой сгущения порядка n, то в δ $\Phi(z)\equiv 0$.*

Доказательство. Без потери общности можно ограничиться случаем, когда $a=0$ (если $a\neq 0$, то следует предварительно совершить перенос $t=z-a$). Функцию $\Phi(z)$, n-аналитическую в круге δ, возможно в этом круге представить в виде:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \tag{5}$$

где $\varphi_k(z)$ — функции, аналитические в δ $(k=0, 1, \cdots, n-1)$. Разлагая эти функции в ряд Тейлора и полагая $z=re^{i\varphi}$, получим

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(k)} z^\nu = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(k)} r^{\nu+k} e^{i(\nu-k)\varphi},$$

откуда

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}^{(k)} e^{(m-2k)i\varphi}. \tag{6}$$

В этой формуле считаем, что

$$a_s^{(k)} = 0, \text{ если } s<0 \text{ или } k \geqslant n. \tag{7}$$

Введем обозначения: $v = e^{2i\varphi}$,

$$B_m(v) = \sum_{k=0}^{m} a_{m-k}^{(k)} v^{m-k}. \tag{8}$$

Тогда

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m e^{-mi\varphi} B_m(v). \tag{9}$$

Теперь легко убедиться, что $\Phi(z)\equiv 0$.

Допустим противное; тогда среди полиномов $B_m(v)$ должны иметься отличные от тождественного нуля. Иначе говоря, существует такое p, что $B_m(v)\equiv 0$ при $m<p$, а

$$B_p(v) \not\equiv 0. \tag{10}$$

Из формулы (9) следует, что

$$\frac{1}{r^p}\Phi(z) = e^{-pi\varphi} B_p(v) + r\sum_{m=p+1}^{\infty} r^{m-p-1} e^{-mi\varphi} B_m(v). \tag{11}$$

В силу условия леммы 1 существуют n различных и попарно несимметричных (относительно точки $z=0$) лучей $\arg z = \theta_1$, $\arg z = \theta_2$, $\cdots$, $\arg z = \theta_n$, вдоль каждого из которых множество E сгущается к точке $z=0$. Сгущение множества E к точке $z=0$ вдоль луча $\arg z = \theta_1$ означает, что в E содержится такая последовательность точек $\{z_k\}$, что $z_k \neq 0$ и при $k \to \infty$ $z_k \to 0$ и $\operatorname{Arg} z_k \to \theta_1$ (под $\operatorname{Arg} z_k$ понимаем один из аргументов числа z_k). Ясно, что $\Phi(z_k) = 0$. Полагая в (11) $z = z_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$B_p(e^{2i\theta_1}) = 0. \tag{12}$$

Таким образом, многочлен $B_p(v)$ имеет корень $\exp(2i\theta_1)$. Аналогично можно показать, что корнями многочлена $B_p(v)$ служат еще числа $\exp(2i\theta_k)$ ($k = 2, 3, \cdots, n$). Итак, полином $B_p(v)$ имеет n различных между собой и неравных нулю корней. Используя (7), можно $B_p(v)$ переписать и в таком виде

$$B_p(v) = v^{p-n+1} \cdot A_p(v), \tag{13}$$

где

$$A_p(v) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{p-k}^{(k)} v^{n-1-k}. \tag{14}$$

Следовательно, полином $A_p(v)$ должен быть отличен от тождественного нуля и иметь n различных корней $\exp(2i\theta_k)$ ($k = 1, 2, \cdots, n$). Но это невозможно, ибо степень полинома $A_p(v)$ не выше, чем $n-1$. Полученное противоречие доказывает ложность исходного допущения. Итак, мы доказали, что $\Phi(z) \equiv 0$.

Следствие 1. *Если функция $\Phi(z)$, полианалитическая порядка n в некотором круге δ, обращается в нуль на некотором (сколь угодно малом) кружке E, содержащем внутри себя или на своей границе центр a круга δ, то $\Phi(z) \equiv 0$ в δ.* Действительно, в этом случае множество E сгущается к центру a круга δ вдоль бесконечного множества лучей, исходящих из a, и в силу леммы 1 $\Phi(z) \equiv 0$ в δ.

Простым следствием из леммы является следующая теорема.

Теорема 1. *(Первая теорема единственности для полианалитических функций). Если функции $f(z)$ и $g(z)$, полианалитические порядка n в некоторой области D, равны на некотором множестве E, причем это множество имеет в области D точку сгущения (a) порядка n, то $f(z) \equiv g(z)$ в D.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть цепочку из конечного числа кружков $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$, таких, что: а) все они принадлежат (вместе со своими окружностями) области D; б) первый кружок (δ_1) имеет своим центром точку a, а последний (δ_m) содержит точку b, где b—произвольная, наперед выбранная точка области D; в) центр каждого кружка δ_k лежит на границе или внутри кружка δ_{k-1}. Пусть $\Phi(z) = f(z) - g(z)$. В силу леммы 1 $\Phi(z) \equiv 0$ в δ_1. Применяя следствие 1 из леммы 1 достаточное число раз, мы последовательно покажем, что $\Phi(z)=0$ в $\delta_2, \delta_3, \cdots, \delta_m$, а, значит, и $\Phi(b)=0$. Итак, $\Phi(z)\equiv 0$ в D, так что $f(z)\equiv g(z)$ в D.

5. Полученные выше результаты могут быть перенесены на более широкий класс функций, которые назовем „*полианалитическими функциями счетного порядка*". Пусть в некоторой окрестности точки a определена функция $w=f(z)$. Эту функцию назовем *полианалитической счетного (или бесконечного) порядка в точке* a, если существует такая окрестность $\delta(a)$ точки a, в которой $f(z)$ представима в виде следующего равномерно сходящегося ряда:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{z}-\bar{a})^k\varphi_k(a;z), \tag{15}$$

где $\varphi_k(a;z)$ — какие-либо аналитические функции относительно z в $\delta(a)$.

Так как допустимо в случае необходимости заменить окрестность $\delta(a)$ окрестностью меньшего радиуса, то возможно всегда считать, что в $\delta(a)$ ряд (15) сходится еще и абсолютно.

Функция $f(z)$ называется *полианалитической функцией счетного порядка* на множестве (в частности, в области) D, если она является полианалитической функцией счетного порядка в каждой точке из D. Вместо термина „*полианалитическая функция счетного порядка*" будем употреблять термин „*полианалитическая функция порядка* A" (здесь символ A обозначает счетную мощность) или термин „*полианалитическая функция*".

Понятно, что всякую полианалитическую функцию конечного порядка n можно рассматривать как полианалитическую функцию счетного порядка (сравните формулы (3) и (15)). Обратное неверно. Заметим, что полианалитические функции счетного порядка впервые, видимо, встречаются в [2].

Введенное в п. 2 понятие точки сгущения порядка n возможно перенести на тот случай, когда под n подразумевается какое-либо трансфинитное число, например, счетная мощность A или мощность континуума C. В частности, точка a называется точкой сгущения порядка A (или счетного порядка) для множества E, если множество E сгущается к точке a не менее, чем вдоль счетного множества различных прямых.

Лемма 1 и теорема 1 остаются в силе, если в них букву n (обозначающую натуральное число) заменить буквой A (обозначающей счетную мощность). Что касается доказательств этих предложений при такой замене, то они претерпевают лишь несущественные или тривиальные изменения. Сформулируем предложения, которые могут быть таким образом получены.

Лемма 1А. *Если функция $\Phi(z)$, полианалитическая счетного порядка в некотором круге $\delta\{|z-a|<\rho\}$, обращается в нуль на множестве E, для которого центр a круга δ служит точкой сгущения счетного порядка, то в δ $\Phi(z)\equiv 0$.*

Теорема 1 А. *Если две функции $f(z)$ и $g(z)$, полианалитические счетного порядка в некоторой области D, равны на некотором множестве E, причем это множество имеет в D точку сгущения счетного порядка, то $f(z) \equiv g(z)$ в D.*

6. Приведем еще несколько простых следствий из теоремы 1.

Следствие 2. *Если две функции $f(z)$ и $g(z)$ полианалитичны (безразлично, какого порядка) в некоторой области D и совпадают в каком-либо (малом) кружке δ из области D, то они тождественны всюду в D.*

Действительно, каждая точка a из δ является для δ точкой сгущения бесконечного порядка.

Следстие 3. *Пусть функция $f(z)$ полианалитична в некоторой (односвязной) области D и пусть область Δ такова, что ее пересечение δ с областью D не пусто. Существует не более, чем одна функция, полианалитическая в Δ и совпадающая с $f(z)$ в δ.*

Опираясь на это следствие, возможно осуществлять аналитическое продолжение полианалитических функций.

Следствие 4. *Если в каждой точке a области D функция $f(z)$ является полианалитической порядка $n(a)$ (порядок полианалитичности зависит от выбора точки), то $f(z)$ будет во всей области D полианалитической порядка n, где $n = \min n(a)$.*

Для доказательства следует построить такую же цепочку перекрывающихся кружков, как и при доказательстве теоремы 1.

В частности, *если функция $f(z)$, полианалитическая в некоторой области D, является аналитической хотя бы в одной точке из D, то она аналитична всюду в D.*

В качестве следствия из теоремы 1 выведем следующий известный факт, обычно устанавливаемый иными средствами.

Следствие 5 (теорема единственности для полигармонических функций). *Если две функции $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$, полигармонические в некоторой области D, равны в сколь угодно малом кружке δ из этой области, то они тождественны во всей области D.*

Доказателство. Функция $v(x, y) \equiv v_1(x, y) - v_2(x, y)$ полигармонична в D; пусть n — ее порядок полигармоничности. В δ $v(x, y) \equiv 0$. Для $v(x, y)$ существует такая функция $\Phi(z)$, n-аналитическая в D, что $\operatorname{Im} \Phi(z) = v(x, y)$. В кружке δ $\operatorname{Im} \Phi(z) \equiv 0$. Отсюда следует (см. [6]), что $\Phi(z)$ совпадает в δ с некоторым вещественным полиномом $C(z, \bar{z})$ от z и $\bar{z}$ („вещественной n-константой"). Но $C(z, \bar{z})$, будучи полиномом, определена на всей плоскости и, в частности, во всей области D. В силу теоремы единственности, всюду в D $\Phi(z) \equiv \equiv C(z, \bar{z})$. Но тогда $\operatorname{Im} \Phi(z) \equiv 0$ всюду в D, так что $v(x, y) \equiv 0$, $v_1(x, y) \equiv v_2(x, y)$ в D.

7. В качестве примера применения первой теоремы единственности полианалитических функций к изучению свойств *аналитических* функций рассмотрим следующую задачу.

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две функции, аналитические в некоторой односвязной области D, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — два вещественных многочлена. Если на каком-то бесконечном множестве E имеет место равенство

$$P(x, y) f(z) = Q(x, y) g(z), \tag{16}$$

то отсюда еще не следует справедливость равенства

$$f(z) \equiv g(z) \tag{17}$$

всюду в D. Например, при $P = x + 1$, $Q = x^2 + 1$, $f = z^2 + 1$, $g = z + 1$ будем иметь, что $P \cdot f = Q \cdot g$ на всей вещественной оси, но равенство (17) верно только при $z = 0$ и $z = 1$, так что (17) не имеет места ни в какой *области* z-плоскости. Спрашивается: что достаточно потребовать от множества E для того, чтобы из (16) следовало (17)? Верен такой результат:

Теорема 2. *Пусть 1) $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — два вещественных многочлена степени не выше n, причем хотя бы в одной точке плоскости они принимают равные ненулевые значения:*

$$P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) \neq 0; \tag{18}$$

2) $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции в некоторой области D; 3) множество E имеет в D точку сгущения порядка $n+1$. В таком случае из справедливости равенства (16) *на E следует справедливость равенства (17) всюду в D.*

Доказательство. Каждый полином n-ой степени является полианалитической функцией порядка $n+1$. Следовательно, $P(x, y) \cdot f(z)$ и $Q(x, y) \cdot g(z)$ — полианалитические функции порядка $n+1$. Но тогда, в силу теоремы единственности, равенство (16) имеет место всюду в D.

Если обе функции $f(z)$ и $g(z)$ равны тождественно нулю в D, то справедливость теоремы тривиальна.

Допустим, что в D одна из функций, например, $g(z)$ не есть тождественный нуль. Тогда найдется такой кружок D_1, внутри которого $g(z)$ вовсе не имеет нулей. Так как полианалитическая функция (полином) $P(x, y)$ отлична (по условию) от тождественного нуля, то внутри D_1 должна найтись точка, в которой $P(x, y) \neq 0$, а, значит, и кружок δ, в котором $P(x, y) \neq 0$. В δ

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \tag{19}$$

Левая часть этого равенства — аналитическая функция в δ, правая часть — вещественна. Следовательно, $f(z)/g(z) \equiv A$, где A — некоторая константа, и $Q(x, y)/P(x, y) \equiv A$ в δ.

Так как полианалитические функции $Q(x, y)$ и $A \cdot P(x, y)$ совпадают в круге δ, то они тождественно равны во всей области их полианалитичности (то есть на всей плоскости), в частности, в точке (x_1, y_1).

Поэтому $A = Q(x_1, y_1)/P(x_1, y_1) = 1$, так что $f(z) \equiv g(z)$ в δ, а, значит, и во всей области D.

8. К первой теореме единственности примыкает следующее предложение, обобщающее известную теорему Витали на случай полианалитических функций произвольного конечного порядка n.

Теорема 3. (Теорема Витали для полианалитических функций). *Пусть последовательность $\{f_k(z)\}$ функций, n-аналитических в некоторой области D, равномерно ограничена внутри D и сходится на некотором множестве E, имеющем в D точку сгущения порядка n. Тогда эта последовательность сходится равномерно внутри D, и притом к n-аналитической функции.*

Доказательство. Так как по условию последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно ограничена во всякой ограниченной замкнутой области $\overline{G}$, принадлежащей D, то в $\overline{G}$ равномерно ограничены и последовательности $\{u_k = \operatorname{Re} f_k(z)\}$ и $\{v_k = \operatorname{Im} f_k(z)\}$. Но это два семейства n-гармонических функций в D. В силу одной теоремы Привалова-Пчелина ([7], теорема 3) семейство полигармонических функций порядка n, равномерно ограниченных внутри D, компактно в D. Следовательно, возможно выбрать такую последовательность номеров k_ν, что внутри D будут сходиться, и притом равномерно, две последовательности $\{u_{k_\nu}\}$ и $\{v_{k_\nu}\}$. Обозначим через u и v предельные функции для этих последовательностей. В силу теоремы 1 из той же статьи [7] u и v будут n-гармоническими функциями. Последовательность n-аналитических функций $\{f_{k_\nu}(z) \equiv u_{k_\nu} + iv_{k_\nu}\}$ тоже, очевидно, будет сходиться равномерно внутри D к функции $f(z) = u + iv$.

В статье [7] (см. теорему 2) было установлено, что равномерно сходящуюся последовательность полигармонических функций возможно почленно дифференцировать сколько угодно раз. В частности, при $\nu \to \infty$

$$\lim (\partial u_{k_\nu} / \partial x) = \partial u/\partial x, \ \lim (\partial v_{k_\nu} / \partial x) = \partial v/\partial x,$$

$$\lim (\partial u_{k_\nu} / \partial y) = \partial u/\partial y, \ \lim (\partial v_{k_\nu} / \partial y) = \partial v/\partial y$$

(сходимость равномерная внутри D).

Отсюда, очевидно, следует, что при $\nu \to \infty$

$$\lim \partial f_{k_\nu} / \partial \bar{z} = \partial f / \partial \bar{z}. \tag{20}$$

Повторяя аналогичные рассуждения достаточное число раз, можно убедиться, что $\partial^n f / \partial \bar{z}^n = \lim (\partial^n f_{k_\nu} / \partial \bar{z}^n)$.

Но $f_{k_\nu}(z)$ — n-аналитическая функция в D. Поэтому $\partial^n f_k / \partial \bar{z}^n \equiv 0$ в D; следовательно, $\partial^n f / \partial \bar{z}^n \equiv 0$ в D, а это значит, что $f(z)$ — n-аналитическая функция в D.

Если $g(z)$ — предел какой-либо другой равномерно сходящейся внутри D подпоследовательности последовательности $\{f_k(z)\}$, то

$g(z)=f(z)$ на множестве E. В силу теоремы единственности $g(z)\equiv$ $\equiv f(z)$ в D.

Рассуждая далее так же, как в случае аналитических функций (см., например, [5]) возможно затем показать, что *вся* последовательность $[f_k(z)]$ сходится к $f(z)$, и притом равномерно внутри D. Теорема доказана.

Из приведенных рассуждений ясно, что верен и такой факт: *если последовательность функций* $[f_k(z)]$, *n-аналитических в некоторой области* D, *а) компактна в* D, *б) сходится в каждой точке некоторого множества* E, *имеющего в* D *точку сгущения порядка* n, *то* $[f_k(z)]$ *сходится равномерно внутри* D, *и притом к n-аналитической функции.*

Из теоремы единственности и теоремы Витали следует, что иногда возможно сделать заключение о свойствах n-гармонических функций (u), если известны некоторые свойства им сопряженных полигармонических функций (v) (то есть таких, что $u+iv$ — n-аналитические функции).

9. В [8] (стр. 9) мы условились называть *открытой простой правильной аналитической дугой* (ОППАД) всякий такой гомеоморф Г какого-либо интервала (α, β), который может быть задан с помощью аналитической функции

$$z=\lambda(t)=\lambda_1(t)+i\lambda_2(t) \quad (\alpha<t<\beta), \tag{21}$$

причем

$$\lambda'(t)\neq 0 \quad \text{на } (\alpha, \beta) \tag{22}$$

(случаи $\alpha=-\infty$ или $\beta=\infty$ не исключаются).

Следующее предложение имеет место для полианалитических функций произвольного (не обязательно конечного) порядка (справедливость его для полианалитических функций порядка 2 была нами отмечена в [8]).

Теорема 4 (вторая теорема единственности для полианалитических функций). *Пусть две функции* $f(z)$ *и* $g(z)$, *полианалитические на некоторой ОППАД Г, принимают равные значения на некотором множестве* E, *принадлежащем дуге Г и имеющем хотя бы одну предельную точку* (ζ_0) *на Г. Тогда* $f(z)$ *и* $g(z)$ *совпадают на всей дуге Г.*

Доказательство. Дуга Г может быть задана уравнением вида (21), где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — вещественные аналитические функции на интервале (α, β). Пусть точка ζ_0 соответствует значению параметра $t=\tau_0$. Выберем какой-нибудь сегмент $[a, b]$ так, чтобы $\alpha<a<\tau_0<b$ $<\beta$. Функция $z=\lambda(t)$ отображает этот сегмент на некоторую (замкнутую) дугу γ, принадлежащую дуге Г. Рассмотрим теперь плоскость *комплексного* переменного t. В ней существует такая область Δ, содержащая сегмент $[a, b]$, в которой функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\lambda(t)$ остаются аналитическими.

Обозначим через τ какую-либо точку из сегмента $[a, b]$. Ей соответствует некоторая точка ζ дуги γ (например, если $\tau = \tau_0$, то $\zeta = \zeta_0$). В некоторой окрестности $D_1(\zeta)$ точки ζ функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta})^k \varphi_k(\zeta; z), \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta})^k \psi_k(\zeta; z) \tag{23}$$

(здесь $\varphi_k(\zeta; z)$ и $\psi_k(\zeta; z)$ при $k = 0, 1, 2, \cdots$ — аналитические функции переменного z). Так как $\lambda'(\tau) \neq 0$, то возможно выбрать окрестность $\Delta(\tau)$ точки τ настолько малой, чтобы функция $z = \lambda(t)$ отобразила $\Delta(\tau)$ взаимнооднозначно на некоторую подобласть $\delta(\zeta)$ круга $D_1(\zeta)$.

Из бесконечной системы кругов $\Delta(\tau)$, покрывающей сегмент $[a, b]$, возможно (в силу леммы Гейне-Бореля) выделить конечную систему кругов, обладающих тем же свойством; в эту систему можем всегда считать включенным круг $\Delta_0 \equiv \Delta(\tau_0)$. Обозначим эти круги (в порядке возрастания абсцисс их центров) через Δ_k; $\Delta_k \equiv \Delta(\tau_k)$ $(k = -m, -m+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n)$. А соответствующие им области плоскости переменного z обозначим через δ_k; $\delta_k \equiv \delta(\zeta_k)$, где $\zeta_k = \lambda(\tau_k)$.

Часть интервала (α, β), лежащую в круге Δ_k, обозначим через i_k; интервалы $\{i_k\}$ в своей совокупности целиком покрывают сегмент $[a, b]$. Отображение $z = \lambda(t)$ сопоставляет интервалу i_k некоторую дугу γ_k — часть дуги Γ; в своей совокупности дуги $\{\gamma_k\}$ покрывают всю дугу γ. Заметим еще, что при любом $k\,(-m \leqslant k \leqslant n-1)$ интервалы i_k и i_{k+1} имеют общий интервал; аналогично, дуги γ_k и γ_{k+1} имеют общую дугу.

В области δ_0 функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы в виде:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta}_0)^k \varphi_k(\zeta_0; z), \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta}_0)^k \psi_k(\zeta_0; z). \tag{24}$$

Функции $f(z)$ и $g(z)$ представляют собой аналитические функции двух переменных x, y в δ_0:

$$f(z) = \varphi(x, y), \quad g(z) = \psi(x, y). \tag{25}$$

Положим в (25) $x = \lambda_1(t)$, $y = \lambda_2(t)$ и рассмотрим в Δ_0 две *аналитические* функции:

$$\Phi(t) \equiv \varphi[\lambda_1(t), \lambda_2(t)], \quad \Psi(t) \equiv \psi[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]. \tag{26}$$

Если t — вещественное число из сегмента $[a, b]$, то

$$\Phi(t) = f[\lambda(t)], \quad \Psi(t) = g[\lambda(t)]. \tag{27}$$

(Для невещественного t числа $\Phi(t)$ и $f[\lambda(t)]$ могут оказаться различными; то же относится к числам $\Psi(t)$ и $g[\lambda(t)]$.

По условию теоремы 4 в множестве E содержится такая последовательность точек $\{z_\nu\}$, что $z_\nu \to \zeta_0$ при $\nu \to \infty$. Начиная с некоторого номера ν_0, точка z_ν будет лежать в области δ_0. Так как отображение $z=\lambda(t)$ взаимно однозначно в Δ_0, то в Δ_0 обязательно найдется такая точка t_ν, что $\lambda(t_\nu)=z_\nu$. Ясно, что при $\nu\to\infty$ $t_\nu\to\tau_0$ (ибо $z_\nu\to\zeta_0$). Кроме того $\Phi(t_\nu)=\Psi(t_\nu)$ $(\nu>\nu_0)$.

В силу известной теоремы единственности для аналитических функций $\Phi(t)\equiv\Psi(t)$ в Δ_0, а, следовательно, и на интервале i_0.

Учитывая (27), заключаем, что на интервале i_0

$$f[\lambda(t)]\equiv g[\lambda(t)].$$

А это означает, что на дуге γ_0

$$f(z)\equiv g(z).$$

Теперь можно повторить аналогичное рассуждение применительно к кругам Δ_1 и Δ_{-1} и показать, что $f(z)\equiv g(z)$ и на дугах γ_1 и γ_{-1}.

Повторяя аналогичные рассуждения достаточное число раз, можно убедиться, что $f(z)\equiv g(z)$ на всех дугах γ_k $(k=-m, -m+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n)$, а, следовательно, — на всей дуге γ.

Так как всегда можно выбрать сегмент $[a, b]$ таким, чтобы дуга γ содержала наперед заданную точку дуги Γ, то отсюда следует, что для любой точки z дуги Γ

$$f(z)=g(z),$$

что и требовалось доказать.

Смоленский педагогический
институт им. К. Маркса

Поступила 20 XI 1964

Մ. Բ. ԲԱԼԿ

ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԱՆԵՐ ՊՈԼԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

$f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է n կարգի պոլիանալիտիկ D տիրույթում, եթե $f(z)$-ը D-ում ներկայացվել է հետևյալ տեսքով՝

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\varphi_k(z),$$

որտեղ $\varphi_k(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են D-ում $(k=0, 1, \cdots n-1)$։ a կետը կոչվում է n կարգի խտացման կետ E բազմության համար, եթե E-ում պարունակվում են n հաջորդականություններ՝

$$z_\nu^{(k)}=a+t_\nu^{(k)}\exp(i\alpha_\nu^{(k)})\quad(k=1, 2, \cdots, n;\ \nu=1, 2, \cdots, n)$$

($t_\nu^{(k)}$ և $\alpha_\nu^{(k)}$ թվերը իրական են), ընդ որում $\alpha^{(k)}$ թվերը տարբեր են և պատկանում են $[0, \pi]$ կիսասեգմենտին։

Միակության առաջին թեորեման.— Եթե $f(z)$ և $g(z)$ երկու ֆունկցիաները մի որևէ D տիրույթում n կարգի պոլիանալիտիկ են և համ-

ընկնում են D-ում n կարգի խտացման կետ ունեցող E բազմության վրա, ապա $f(z) = g(z)$ ամենուրեք D-ում։

Այս թեորեմայում օգտագործված գաղափարները և ինքը՝ թեորեման տարածվում են այն դեպքի վրա, երբ $n = \infty$։

Միակության առաջին թեորեմայից բխում է Վիտալի հայտնի թեորեմայի անալոգը պոլիանալիտիկ ֆունկցիաների համար։

Միակության երկրորդ թեորեման.— Դիցուք $f(z)$ և $g(z)$ երկու ֆունկցիաներ, որոնք պոլիանալիտիկ են մի բաց պարզ կանոնավոր անալիտիկ Γ աղեղի վրա, հավասար արժեքներ են ընդունում մի E բազմության վրա, որը պատկանում է Γ աղեղին և ունի թեկուզ մեկ սահմանային կետ Γ-ի վրա. այն ժամանակ $f(z) = g(z)$-ի ամբողջ Γ աղեղի վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burgatti P.* Sulle fonzioni analytiche d'ordini n. „Bolletino della Unione matemat. Italiana", v. I, 1922.
2. *Teodorescu N.* La derivée aréolaire et ses applications physiques. Thèse. Paris, Gauthier—Villars, 1931.
3. *Балк М. Б.* К теории полианалитических функций. Сб. „V Всесоюзная конференция по теории функций", Ереван, 1960.
4. *Саркисян С. Ц.* Свойства решений систем Коши-Римана с нелинейными правыми частями. Доклады АН АрмССР, 24, № 3, Ереван, 1963.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М., 1950, стр. 290—295.
6. *Балк М. Б.* Об n-аналитических функциях. В сб. „Смоленский педагогический институт. Рефераты и тезисы докладов XI научной конференции". Смоленск, 1960.
7. *Привалов И.* и *Пчелин Б.* К общей теории полигармонических функций. Математический сборник, новая серия, 2, № 4, 1937.
8. *Балк М. Б.* О бианалитических функциях с неизолированными a-точками. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.