

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. ХАЧАТРЯН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ФОРМУЛ
 ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В работе [1], основываясь на принципе Гюйгенса, была получена приближенная формула для полей излучения при равномерном движении точечной заряженной частицы через отверстие произвольной формы в плоском бесконечно тонком и бесконечно проводящем экране (см. формулу (1.5) работы [1]). Скорость частицы $v \sim c$ и направлена вдоль оси z , а углы излучения $\vartheta \ll 1$. Экран находится в плоскости $z = 0$.

В настоящей работе, исходя из векторной формулы Грина (см., например, [2]) математически обосновывается и уточняется формула (1.5).

Запишем уравнения Максвелла для монохроматических компонент векторов поля

$$\text{rot } \vec{H}' = -ik \vec{E}' + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \vec{E}' = ik \vec{H}', \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{H}' = 0, \quad (3)$$

$$\text{div } \vec{E}' = 4\pi \rho, \quad (4)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, ρ и $\vec{j}$ — плотности заряда и тока частицы, удовлетворяющие уравнению непрерывности

$$\text{div } \vec{j} - i\omega \rho = 0. \quad (5)$$

Отметим, что полученные ниже результаты легко распространяются на случай распределения заряда, имеющего осевую симметрию относительно оси z (сгустки и т. д.)

Представим решение системы (1) — (4) в виде

$$\vec{E}' = \vec{E}^0 + \vec{E}, \quad (6)$$

$$\vec{H}' = \vec{H}^0 + \vec{H}, \quad (7)$$

где $\vec{E}^0$ и $\vec{H}^0$ — собственные поля частицы, удовлетворяющие неоднородной системе уравнений (1) — (4), а $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — поля излучения, удовлетворяющие однородной системе

$$\text{rot } \vec{H} = -ik\vec{E}, \quad (1')$$

$$\text{rot } \vec{E} = ik\vec{H}, \quad (2')$$

$$\text{div } \vec{H} = 0, \quad (3')$$

$$\text{div } \vec{E} = 0. \quad (4')$$

Вспользуемся теперь векторной формулой Грина: если $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ две произвольные векторные функции точки, непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными в объеме V и на поверхности s , окружающей этот объем, то

$$\int_V (\vec{Q} \text{ rot rot } \vec{P} - \vec{P} \text{ rot rot } \vec{Q}) dV = \int_s ([\vec{P} \text{ rot } \vec{Q}] - [\vec{Q} \text{ rot } \vec{P}]) \vec{ds}, \quad (8)$$

где $\vec{ds} = \vec{n} ds$, $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности s . Ниже везде в качестве объема V мы будем брать бесконечное полупространство $z > 0$ ($z < 0$), а в качестве поверхности s — плоскость $z = 0$, которую можно считать замыкающей на бесконечности, поскольку в правой части соотношения (8) мы будем иметь функции, экспоненциально убывающие на бесконечности (см. формулы (13) и (14)).

В качестве векторов $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ возьмем

$$\vec{P} = \vec{E}, \quad \vec{Q} = \frac{e^{ikr}}{r} \vec{\tau} \equiv \varphi \vec{\tau}, \quad (9)$$

$\vec{\tau}$ — единичный вектор произвольного направления, r — расстояние от переменной точки (x, y, z) до точки наблюдения (x', y', z') внутри объема V .

Можно показать, что вектор $\vec{\tau}$ является общим множителем для всех членов в формуле (8). Поэтому, ввиду его произвольности, из формулы (8) для значения $\vec{E}$ в точке (x', y', z') будем иметь

$$\vec{E}(\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int_s (ik[\vec{n}\vec{H}] \varphi + [[\vec{n}\vec{E}] \text{ grad } \varphi] + (\vec{n}\vec{E}) \text{ grad } \varphi) ds. \quad (10)$$

Аналогично для вектора $\vec{H}$ найдем

$$\vec{H}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_s (ik[\vec{n}\vec{E}] \varphi - [[\vec{n}\vec{H}] \text{ grad } \varphi] - (\vec{n}\vec{H}) \text{ grad } \varphi) ds. \quad (11)$$

При получении формул (10) и (11) мы воспользовались также и тем, что функция φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi + k^2\varphi = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

Поскольку мы рассматриваем излучение частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света c , то векторы собственного поля частицы $\vec{E}^0$ и $\vec{H}^0$ являются приблизительно поперечными по отношению к направлению движения частицы $\vec{n}\vec{E}^0, \vec{n}\vec{H}^0 \approx 0$. Кроме того, так как мы рассматриваем также и малые углы излучения, то для полей излучения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеем

$$E_z \ll E_x, E_y, \quad H_z \ll H_x, H_y. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь граничные условия на экране (s_2). Так как экран предполагается бесконечно проводящим, то для компонент электрического вектора поля излучения имеем

$$E_{2x,y}^* = E_{x,y}^*|_{s_2} = 0, \quad \text{то есть } E_{2x,y}^* = -E_{x,y}^0. \quad (13)$$

Далее из соотношений

$$\vec{H}^0 = \frac{1}{c} [\vec{v}\vec{E}^0], \quad \vec{H} = [\vec{v}\vec{E}]$$

($\vec{v}$ — единичный вектор в направлении излучения), с учетом малости углов излучения, находим

$$H_{2x,y}^* = -H_{x,y}^0. \quad (14)$$

(Отметим, в связи с формулой (8), что поля $\vec{E}^0$ и $\vec{H}^0$ на бесконечности убывают экспоненциально).

В точках же отверстия (s_1) мы будем предполагать, что

$$\vec{E}_1 = 0, \quad \vec{H}_1 = 0. \quad (15)$$

Это условие фактически сводится к известному приближению Кирхгофа в теории дифракции света. Действительно, в применении к формулам (6) и (7) соотношение (15) дает, что в точках отверстия полное поле равно полю падающей частицы, то есть оно такое, какое было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана — приближение Кирхгофа.

С учетом (12) — (15) из формул (10) и (11) получаем следующие выражения для электрического и магнитного векторов поля излучения:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \int_{s_2} \left(ik [\vec{n}\vec{H}^0] \varphi + [[\vec{n}\vec{E}^0] \text{grad } \varphi] \right) ds, \quad (16)$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \left(ik [\vec{n}\vec{E}^0] \varphi + [[\vec{n}\vec{H}^0] \text{grad } \varphi] \right) ds. \quad (17)$$

Однако, полученные нами выражения (16) и (17) для полей излучения нельзя применить непосредственно к задачам излучения при пролете через отверстия в экранах. Причина этого заключается в том, что результаты, полученные нами, справедливы лишь тогда, когда векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ непрерывны и имеют непрерывные производные во всех точках поверхности $s = s_1 + s_2$. В рассматриваемых же нами задачах эта непрерывность нарушается, поскольку при переходе из s_1 в s_2 тангенциальные компоненты $\vec{E}$ и $\vec{H}$ претерпевают разрыв непрерывности. Кроме того, легко видеть, что поля излучения (16) и (17) не удовлетворяют уравнениям Максвелла. (Аналогичная ситуация имеет место и в теории дифракции света, где решения однородной системы уравнений Максвелла — дифрагированные поля, полученные непосредственным интегрированием уравнений поля при помощи формулы (8), также не удовлетворяют исходной системе уравнений [2]). Следовательно, чтобы распространить формулы (16) и (17) и на подобные случаи, необходимо видоизменить их так, чтобы совместить наличие разрывов с уравнениями поля.

Для этого мы поступаем аналогично тому, как это делается в теории дифракции электромагнитных волн [2,3]. Наличие разрыва векторов поля при переходе через контур C , разделяющий экран и отверстие приводит к тому, что имеет место скачкообразное изменение поверхностной плотности тока. Обрыв же линий тока, согласно уравнению непрерывности, приводит к накоплению заряда на контуре C с некоторой линейной плотностью. Ясно, что наличие зарядов на контуре определенным образом изменит поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Только при учете этого изменения выражения, получающиеся для полей излучения будут удовлетворять уравнениям (1') — (4').

Пусть $d\vec{l}$ — элемент длины вдоль контура C . Тогда вклад в поля излучения $\vec{E}$ и $\vec{H}$, обусловленный наличием контурных зарядов, равен [2,3]

$$-\frac{i}{4\pi k} \oint_C \text{grad } \varphi (\vec{H}_2 - \vec{H}_1, d\vec{l}) = \frac{i}{4\pi k} \oint_C \text{grad } \varphi (\vec{H}^\circ d\vec{l}) \quad (18)$$

(для электрического поля $\vec{E}$)

$$\text{и} \quad -\frac{i}{4\pi k} \oint_C \text{grad } \varphi (\vec{E}^\circ d\vec{l}) \quad (19)$$

(для магнитного поля $\vec{H}$).

Таким образом, для полей излучения, с учетом наличия зарядов на контуре, окончательно имеем

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{i}{4\pi k} \oint_C \text{grad } \varphi (\vec{H}^\circ d\vec{l}) + \frac{1}{4\pi} \int ([ik \vec{n} \vec{H}^\circ] \varphi + [\vec{n} \vec{E}^\circ] \text{grad } \varphi) ds, \quad (20)$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = -\frac{i}{4\pi k} \oint_C \text{grad } \varphi (\vec{E}^\circ d\vec{l}) - \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} (ik[\vec{n}\vec{E}^\circ] \varphi - [\vec{n}\vec{H}^\circ] \text{grad } \varphi) ds. \quad (21)$$

Ясно, что при бесконечном увеличении размеров отверстия (свободное пространство) излучение должно исчезнуть. Легко видеть, что поля излучения в этом случае действительно обращаются в нуль. Отметим еще следующее обстоятельство. Формулы (20) и (21) дают правильный результат как для излучения вперед, так и для излучения назад, поскольку окончательный результат не меняется от того, замыкаем ли мы поверхность S на бесконечности справа (объем V есть полупространство $z > 0$) или слева (объем V есть полупространство $z < 0$).

Покажем теперь, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$, определяемые формулами (20) и (21), удовлетворяют уравнениям Максвелла (1')—(4'). Докажем поперечность электрического вектора, то есть вычислим $\text{div}_{r'} \vec{E}(\vec{r}')$ (знак r' у дивергенции означает, что производные берутся по штрихованным координатам — точка наблюдения)

$$\text{div}_{r'} \vec{E}(\vec{r}') = \frac{ik}{4\pi} \oint_C \varphi (\vec{H}^\circ d\vec{l}) - \frac{ik}{4\pi} \int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}^\circ] \text{grad } \varphi ds. \quad (22)$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_{S_2} [\vec{n} \vec{H}^\circ] \text{grad } \varphi ds &= \int_{S_2} \left\{ \varphi \text{rot } \vec{H}^\circ - \text{rot}(\varphi \vec{H}^\circ) \right\} d\vec{s} = \\ &= \int_{S_2} \varphi \left(-ik\vec{E}^\circ + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) d\vec{s} + \oint_C \varphi (\vec{H}^\circ d\vec{l}) = \oint_C \varphi (\vec{H}^\circ d\vec{l}), \end{aligned} \quad (23)$$

так как

$$\vec{n} \vec{E}^\circ = 0 \quad \text{и} \quad \vec{j}|_{S_2} = 0.$$

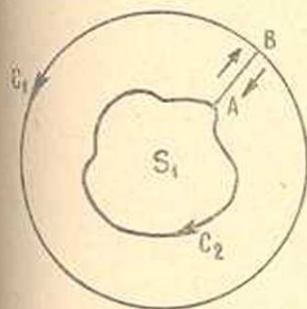
Из (22) и (23) сразу следует, что

$$\text{div } \vec{E} = 0.$$

При преобразованиях в формуле (23) мы использовали теорему Стокса в виде

$$\int_{S_2} \text{rot}(\varphi \vec{H}^\circ) d\vec{s} = - \oint_C \varphi \vec{H}^\circ d\vec{l}. \quad (24)$$

В справедливости этой формулы легко убедиться, если применить теорему Стокса к „кольцу“, изображенному на фиг. Интегралы по AB и BA взаимно сокращаются, а интеграл по окружности C_1 стремится к нулю, когда радиус последней устремляем к бесконечности. (Во всех контурных интегралах обход по контуру C происходит против часовой стрелки). Точно так же доказывается, что уравнения (1')—(3') удовлетворяются. Покажем теперь, что при определенных



предположениях из формул (20) и (21) следует формула (1.5) работы [1]. Предположим, что контурными интегралами можно пренебречь. Оценки, проведенные для некоторых частных случаев, как-то пролет через центр круглого отверстия радиуса, пролет на расстоянии $r_0 \ll a$ от центра отверстия и пролет через бесконечную щель показывают, что контурные интегралы действительно малы. Например, в первом случае он равен нулю, а во втором его вклад в интенсивность порядка $\frac{r_0}{a}$.

Тогда, например, для вектора $\vec{H}$ с учетом (13) и (14) будем иметь

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \left(ik [\vec{n} \vec{E}] \varphi - [\vec{n} \vec{H}] \text{grad } \varphi \right) ds. \quad (25)$$

Так как при больших r

$$\text{grad } \varphi = -ik \vec{z} \varphi, \quad (26)$$

то если предположить, что пренебрежение контурным интегралом не нарушает поперечности поля излучения, можем написать

$$-[\vec{n} \vec{H}] \text{grad } \varphi = ik \vec{z} \vec{H}(\vec{z} \vec{n}) \simeq ik \varphi [\vec{n} \vec{E}]. \quad (27)$$

Здесь мы к $\vec{H}(\vec{z} \vec{n})$ прибавили выражение $\vec{z}(\vec{n} \vec{H})$, учитывая, что

$$|\vec{z}(\vec{n} \vec{H})| \ll |\vec{H}(\vec{z} \vec{n})|.$$

Из (25), (27) и (13) находим

$$\vec{H} = -\frac{ik}{2\pi} \int_{s_2} [\vec{n} \vec{H}^0] \varphi ds. \quad (28)$$

Учитывая, что $\varepsilon_x, \varepsilon_y \ll \varepsilon_z$, $\varepsilon_z \sim 1$ и $\vec{H} = [\vec{z} \vec{E}]$, из (28) получаем

$$E_{x,y} = -\frac{ik}{2\pi} \int_{s_2} E_{x,y}^0 \varphi ds. \quad (29)$$

Формула (29) в точности соответствует формуле (1.5).

В заключение выражаю благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за многочисленные и ценные обсуждения.

Объединенная радиационная лаборатория
АН Армянской ССР и

Ереванского государственного университета

Поступила 21 XI 1964

Բ. Վ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԲԱՆԱԶԵՎԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄ

Ա. մ. ֆ. ի. լ. ի. մ.

Ելնելով Գրինի վեկտորական բանաձևից, մաթեմատիկորեն հիմնավորում և ճշգրտում է ճառագայթման դաշտերի համար [1] աշխատության մեջ ստացված բանաձևը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Микаелии М. Л., Хачатрян Б. В. Дифракционное излучение быстрых частиц. ДАН Арм. ССР, 40, № 1, 1965.
2. Страттон Дж. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М. — Л., 1948.
3. Stratton J. A. and Chu L. J. Diffraction theory of Electromagnetic Waves. Phys. Rev., 56, 99, 1939.