

А. Д. ГАЗАЗЯН

О НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ АНАЛОГИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БЛОХА — НОРДСИКА

Одним из методов устранения инфракрасной расходимости в квантовой электродинамике является приближение Блоха-Нордсика [1]. Сущность этого метода заключается в приближенном решении уравнения Дирака для электрона и системы фотонов, с предположением, что длинноволновое фотонное поле мало влияет на движение электрона.

В данной работе мы будем развивать аналогичный метод для уравнения Шредингера. Окончательные результаты (при пренебрежении эффектами интенсивности фотонного поля) совпадают с результатами работы [1], если в последней положить скорость электрона $v \ll 1$.

Гамильтониан для электрона и системы фотонов, при кулоновской калибровке электромагнитного поля ($A_0 = 0$), имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 - \frac{e}{\mu} (\vec{A} \hat{p}) + \frac{e^2}{2\mu} \vec{A}^2 + H_{\text{фот}}, \quad (1)$$

где

$$H_{\text{фот}} = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) dV. \quad (2)$$

Рассмотрим квантованное электромагнитное поле, векторный потенциал которого определяется разложением

$$\vec{A} = \frac{1}{V} \sum_{s, \lambda} \omega_s^{-1/2} \vec{e}_{s\lambda} (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}). \quad (3)$$

Здесь индекс s служит для обозначения волнового вектора $\vec{k}_s$ и частоты ω_s фотона, $\vec{e}_{s\lambda}$ — единичный вектор в направлении поляризации, состояние которой обозначается индексом λ , V — нормировочный объем. Динамические переменные $P_{s\lambda}$ и $Q_{s\lambda}$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям координаты и импульса:

$$[P_{s\lambda}, Q_{s'\lambda'}] = -i\delta_{ss'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [P_{s\lambda}, P_{s'\lambda'}] = 0, \quad [Q_{s\lambda}, Q_{s'\lambda'}] = 0. \quad (4)$$

Подставляя разложение (3) в выражения (1) и (2), получим

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 - \sum_{s, \lambda} (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}) \left(\vec{a}_{s\lambda} \frac{\hat{p}}{\mu} \right) + \\ + \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{s, \lambda} \vec{a}_{s\lambda} (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{s, \lambda} \omega_s (P_{s\lambda}^2 + Q_{s\lambda}^2), \quad (5)$$

где

$$\vec{a}_{s\lambda} = e (V \omega_s)^{-1/2} \vec{e}_{s\lambda}. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (7)$$

решение которого представим в виде

$$\Psi(\vec{r}, Q_{s\lambda}) = \Psi_{\vec{p}}(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda}), \quad (8)$$

где функция $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\vec{p} \Psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p} \Psi_{\vec{p}}(\vec{r}), \quad (9)$$

а $\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda})$ — некоторая слабо зависящая от $\vec{r}$ функция.Подставляя решение (8) в уравнение (7), приходим к следующему уравнению для функции $\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda})$:

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}_1) \varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda}) = E \varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda}), \quad (10)$$

где

$$\hat{H}_0 = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu v^2}{2} - \sum_{s, \lambda} (\vec{v} \vec{a}_{s\lambda}) (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}) + \frac{1}{2} \sum_{s, \lambda} \omega_s (P_{s\lambda}^2 + Q_{s\lambda}^2), \quad (11)$$

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \sum_{s, \lambda} (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}) \left(\vec{a}_{s\lambda} \frac{\hat{p}}{\mu} \right) + \\ + \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{s, \lambda} \vec{a}_{s\lambda} (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}) \right)^2. \quad (12)$$

здесь $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{\mu}$ — c -число, есть скорость электрона.

Мы в данной работе будем рассматривать не очень большие интенсивности фотонного поля. Кроме того, если иметь в виду, что функция $\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda})$ слабо зависит от $\vec{r}$, то оператор $\hat{H}_1$ можно учитывать как возмущение к основному гамильтониану $\hat{H}_0$. Таким образом, в нулевом приближении теории возмущений, мы будем иметь сле-

дующее, аналогичное методу Блоха-Нордсика, уравнение для функции $\varphi_0(\vec{r}, Q_{s\lambda})$:

$$\left\{ \vec{v} \vec{p} + \frac{\mu v^2}{2} - \sum_{s,\lambda} (\vec{v} \vec{a}_{s\lambda}) (P_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{s,\lambda} \omega_s (P_{s\lambda}^2 + Q_{s\lambda}^2) \right\} \varphi_0 = E_0 \varphi_0. \quad (13)$$

Чтобы решить уравнение (13), произведем каноническое преобразование

$$P_{s\lambda} = P'_{s\lambda} + \sigma_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r}, \\ Q_{s\lambda} = Q'_{s\lambda} + \sigma_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}', \\ \vec{p} = \vec{p}' - \sum_{s,\lambda} \vec{k}_s \sigma_{s\lambda} \left[P'_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} + Q'_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r} + \frac{1}{2} \sigma_{s\lambda} \right]$$

и подберем константы $\sigma_{s\lambda}$ таким образом, чтобы преобразованный гамильтониан $\hat{H}'_0$ не содержал линейных членов $P'_{s\lambda}$ и $Q'_{s\lambda}$. Легко видеть, что это условие приводит к следующим значениям $\sigma_{s\lambda}$:

$$\sigma_{s\lambda} = \frac{\vec{v} \vec{a}_{s\lambda}}{|\vec{k}_s| - \vec{v} \vec{k}_s}. \quad (15)$$

Такое преобразование оставляет неизменными коммутационные соотношения. Сделаем одновременно преобразование волновой функции

$$\varphi'_0 = S^{-1} \varphi_0 \quad (16)$$

и потребуем, чтобы действие новых (штрихованных) операторов на волновую функцию φ'_0 оставалось инвариантным. Такое требование приводит к следующему виду для оператора S :

$$S = \exp i \sum_{s,\lambda} \sigma_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} \left[Q'_{s\lambda} + \frac{1}{2} \sigma_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r} \right]. \quad (17)$$

Уравнение для преобразованной волновой функции $\varphi'_0 = S^{-1} \varphi_0$

$$\left\{ \vec{v} \vec{p}' + \frac{\mu v^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{s,\lambda} \omega_s (P_{s\lambda}'^2 + Q_{s\lambda}'^2) - \frac{1}{2} \sum_{s,\lambda} \frac{(\vec{v} \vec{a}_{s\lambda})^2}{|\vec{k}_s| - \vec{v} \vec{k}_s} - E_0 \right\} \varphi'_0 = 0 \quad (18)$$

имеет решение

$$\varphi'_0 = \prod_{s,\lambda} h_{n_{s\lambda}}(Q'_{s\lambda}) \quad (19)$$

с собственным значением

$$E_0 = \frac{\mu v^2}{2} + \sum_{s,\lambda} \omega_s \left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{s,\lambda} \frac{(\vec{v} \vec{a}_{s\lambda})^2}{|\vec{k}_s| - \vec{v} \vec{k}_s}. \quad (20)$$

Здесь $h_n(x)$ — нормированное решение осцилляторного уравнения

$$h_n''(x) - x^2 h_n(x) + (2n + 1) h_n(x) = 0.$$

Переходя к первоначальным переменным, запишем полную приближенную волновую функцию в виде

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left\{ i \vec{p} \vec{r} + i \sum_{s, \lambda} \sigma_{s\lambda} \cos \vec{k}_s \vec{r} \left[Q_{s\lambda} - \frac{1}{2} \sigma_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r} \right] \right\} \times \\ \times \prod_{s, \lambda} h_{n_{s\lambda}}(Q_{s\lambda} - \sigma_{s\lambda} \sin \vec{k}_s \vec{r}). \quad (21)$$

Для выяснения условий применимости нашего приближения вычислим по теории возмущений поправку E_1 от оператора $\hat{H}_1$ к основному значению энергии E_0 :

$$E = E_0 + E_1, \quad (22)$$

где

$$E_1 = \int \Psi_0^* \hat{H}_1 \Psi_0 d\vec{r} \prod_{s, \lambda} dQ_{s\lambda}. \quad (23)$$

После вычисления интеграла (23) получим

$$E_1 = \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{s, \lambda} \sigma_{s\lambda} \left(\vec{a}_{s\lambda} + \frac{1}{2} \vec{k}_s \sigma_{s\lambda} \right) \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \sum_{s, \lambda} (\vec{a}_{s\lambda} + \vec{k}_s \sigma_{s\lambda})^2 \left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (24)$$

Подставляя выражения (20) и (24) в формулу (22), получим

$$E = \frac{\mu v^2}{2} + \sum_{s, \lambda} \omega_s \left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{s, \lambda} \frac{(\vec{v} \vec{a}_{s\lambda})^2}{|\vec{k}_s| - \vec{v} \vec{k}_s} + \\ + \frac{1}{2\mu} \left(\sum_{s, \lambda} \sigma_{s\lambda} \left(\vec{a}_{s\lambda} + \frac{1}{2} \vec{k}_s \sigma_{s\lambda} \right) \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \sum_{s, \lambda} (\vec{a}_{s\lambda} + \vec{k}_s \sigma_{s\lambda})^2 \left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (25)$$

Чтобы найти параметр разложения теории возмущений, произведем суммирование по s и λ в последних трех членах выражения (25). Суммирование по двум реальным поляризационным состояниям фотона ($\lambda = 1, 2$) можно произвести, используя известную формулу

$$\sum_{\lambda=1,2} (\vec{e}_{s\lambda} \vec{a})(\vec{e}_{s\lambda} \vec{b}) = \vec{a} \vec{b} - \frac{(\vec{k}_s \vec{a})(\vec{k}_s \vec{b})}{k_s^2},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, а суммирование по s можно заменить интегрированием по правилу:

$$\frac{1}{V} \sum_s \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\omega_{\max}} \omega^2 d\omega \int dO.$$

После полного интегрирования окончательно получим

$$E^{(\max)} = \frac{\mu v^2}{2} + \sum_{s, \lambda} \omega_s \left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 \omega_{\max}}{2(2\pi)^2} \left(2 + \frac{1-v^2}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} \right) + \\ + \frac{e^4 \omega_{\max}^2}{2\mu} \frac{1}{2(2\pi)^4} \frac{1}{v^2} \left(2 + \frac{1+v^2}{v} \ln \frac{1-v}{1+v} \right)^2 - \\ - \frac{e^2 \omega_{\max}^2}{2\mu} \frac{1}{(2\pi)^2} \left(n_{s\lambda}^{(\max)} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{v} \ln \frac{1-v}{1+v}, \quad (26)$$

где

$$n_{s\lambda}^{(\max)} = \max |n_{s\lambda}|.$$

Так как у нас рассматривается нерелятивистский случай $v \ll 1$, то после разложения логарифмов, получим

$$E^{(\max)} = \frac{\mu v^2}{2} + \sum_{s, \lambda} \omega_s \left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_{\max}}{(2\pi)^2} v^2 + \\ + \frac{16}{9} \frac{e^4 \omega_{\max}^2}{(2\pi)^4 \mu} v^2 + \frac{e^2 \omega_{\max}^2}{\mu} \frac{1}{(2\pi)^2} \left(n_{s\lambda}^{(\max)} + \frac{1}{2} \right).$$

Из сравнения последних трех членов легко видеть, что параметрами разложения теории возмущений являются $\frac{e^2 \omega}{\mu}$ и $\frac{\omega}{\mu v^2} n_{s\lambda}^{(\max)}$.

В заключение автор выражает благодарность профессору М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждение результатов.

Объединенная радиационная лаборатория
Ереванского государственного университета и
Академии наук Армянской ССР

Поступила 21 X 1964

Ա. Դ. ԳԱԶԱՐՅԱՆ

ԲԱՌԱՆՈՐԴՄԱՆԻ ՄԱՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ԱՉ ՌԵԼԱՏԻՎԻՍՏԻԿ
ԱՆԱՍՏՈՒՄԱՍԻՆ

Ա. Դ. Գ. Գ. Գ.

Աշխատության մեջ դիտարկված է Շրեդինգերի հալառարածը էլեկտրոնի և երկարալիք ֆոտոնների սխեմայի համար: Ստացված է որդ սխեմայի օպերացիոն ֆունկցիան և էներգետիկ օպերատորը, ուսումնասիրված են մասնավորության կիրառման սահմանները՝ ըստ զրգուռների տեսության:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bloch F., Nordsieck A. Note on the Radiation Field of the Electron, Phys. Rev., 52, 1937, 54.