ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

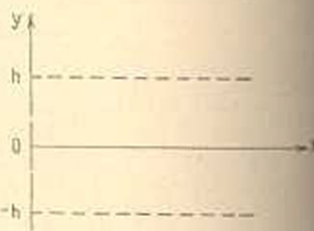
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. БАБАДЖАНЯН

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Течение реальной жидкости вблизи проницаемых поверхностей представляет как теоретический, так и практический интерес. Так, например, в вопросах управления пограничного слоя, в задачах теплопередачи, в некоторых химических процессах и т. д. В данной работе рассматривается плоское установившееся, ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с пористыми стенками (фиг. 1), ширина канала $2h$. Проницаемость вдоль стенки принимается постоянной, силами тяжести пренебрегаем.



Фиг. 1.

1. Выбираем систему координат с началом в центре канала. Ось ox находится в плоскости, параллельной стенкам канала, ось oy перпендикулярна стенкам. За исходные уравнения движения примем уравнения Навье—Стокса

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Здесь u, v — компоненты скорости по осям ox и oy, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Исходя из постановки задачи и из симметричности потока (относительно оси $0x$), имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } y=+h \quad x\geqslant 0$$

$$u=0 \quad v=k(p-p_b). \tag{1.2}$$

где p_b — внешнее давление, k — коэффициент пористости стенки. Если $p>p_b$ имеет место отсос жидкости, в случае $p<p_b$ — вдувание жидкости

$$\text{при } y = 0 \quad x \geqslant 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \tag{1.3}$$

В начальном сечении потока, то есть при $x = 0$ принимаем

$$p_0 = p_н, \; p_i = 0 \quad \text{при } i \geqslant 1,$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_0 dy = U_{ср}, \quad \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_i dy = 0, \quad v_0 = v_i = 0, \quad \text{при } i \geqslant 1, \tag{1.4}$$

где $p_н$ есть давление в начальном сечении потока, $U_{ср}$ — средняя скорость по начальному сечению. При такой постановке задачи требуется найти поле скоростей и давления вдоль и поперек канала.

2. Задача решается методом малого параметра [1]. В качестве малого параметра принимается отношение ширины к характерной длине канала. Вводим малый параметр в систему уравнений и в граничные условия, заранее приводя их к безразмерному виду, пользуясь следующими соотношениями:

$$u = c\bar{u}, \; v = c\sigma\bar{v}, \; x = l\bar{x}, \; y = h\bar{y},$$
$$p = \rho c^2 \frac{\nu}{\sigma}\bar{p}, \; \nu = hc\bar{\nu}, \qquad k = \frac{\sigma^2}{\rho c \nu}\bar{k}. \tag{2.1}$$

где c — характерная скорость,

l — характерная длина канала,

$$\sigma = \frac{h}{l} \ll 1 \text{ — малый параметр.}$$

Подставляя значения размерных величин через безразмерные в систему уравнений (1.1), а также в граничные условия, получим:

$$\sigma\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \nu\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma^3\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \nu\left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \sigma^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\text{при } y = +1 \quad x \geqslant 0$$
$$u = 0, \quad v = k(p - p_b); \tag{2.3}$$

$$\text{при } y = 0, \quad x \geqslant 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad v = 0; \tag{2.4}$$

при $x = 0$

$$p_0 = p_н, \quad p_i = 0; \int\limits_0^1 u_0 dy = U_{ср}, \int\limits_0^1 u_i dy = 0, \quad v_0 = v_i = 0 \text{ при } i > 1. \tag{2.5}$$

Для удобства письма черточки сверху опущены. Так как поток симметричен относительно оси ox, то решение задачи представим для одной половины канала, то есть для значения $y = 1$. Искомые функции ищем в виде степенного ряда по степеням малого параметра σ, то есть в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \cdots \\ v &= v_0 + \sigma v_1 + \sigma^2 v_2 + \cdots \\ p &= p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляем значения u, v и p из (2.6) в систему уравнений (2.2) и в граничные условия (2.3) и (2.4). Приравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями σ, получим систему уравнений, из которой определяются неизвестные с требуемой точностью. Составим систему уравнений. Приравнивая в (2.2) коэффициенты при нулевой степени σ, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial p_0}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Интегрируя первое уравнение два раза по y, получим

$$u_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial p_0}{\partial x} y^2 + f_1(x) y + f_2(x).$$

Определим произвольные функции интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$, пользуясь граничными условиями (2.3) и (2.4), тогда для u_0 получим

$$u_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial p_0}{\partial x}(y^2 - 1). \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в третье уравнение системы (2.7) и интегрируя, для v_0 получим следующее значение

$$v_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} y\left(1 - \frac{y^2}{3}\right) + f_3(x).$$

Из второго условия системы (2.4) получим, что $f_3(x) = 0$, тогда

$$v_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right). \tag{2.9}$$

Значение p_0 можно найти из второго условия системы (2.3). Действительно, из этого условия имеем

$$v_0(x, 1) = k(p_0 - p_b). \tag{2.10}$$

Подставляя значение $v_0(x, 1)$ из (2.9) в уравнение (2.10), получим относительно p_0 следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 p_0}{dx^2} - 3kp_0 = -3kp_b,$$

решение которого есть

$$p_0 = p_b + c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax},$$

где $a = \sqrt{3k}$.

Определяя постоянные интегрирования, пользуясь граничными условиями (2.5), и подставляя в выражение p_0, получим

$$p_0 = p_b + (p_н - p_b)\operatorname{ch} ax - \frac{3U_{ср}}{a}\operatorname{sh} ax. \tag{2.11}$$

Подставляя значение p_0 в выражения u_0 и v_0, получим соответственно

$$u_0 = \frac{1}{2}\left[a(p_н - p_b)\operatorname{sh} ax - 3U_{ср}\operatorname{ch} ax\right](y^2 - 1). \tag{2.12}$$

$$v_0 = \frac{a}{2}\left[a(p_н - p_b)\operatorname{ch} ax - 3U_{ср}\operatorname{sh} ax\right]\left(y - \frac{y^3}{3}\right). \tag{2.13}$$

Второе приближение искомых функций найдем из системы уравнений, полученной из (2.2) путем приравнивания коэффициентов при первой степени ε

$$\begin{gathered}
u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\nu\frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.
\end{gathered} \tag{2.14}$$

Вычисляя левую часть первого уравнения системы (2.14) и решая его относительно $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$, получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \left[A_1\operatorname{sh} 2ax - A_2\operatorname{ch} 2ax\right]\left(1 + \frac{y^4}{3}\right), \tag{2.15}$$

где $A_1 = \dfrac{(p_н - p_b)^2 a^3 + 9U_{ср}^2 a}{8\nu}$, $\quad A_2 = \dfrac{3(p_н - p_b)U_{ср}\, a^2}{4\nu}$. (2.16)

Интегрируя уравнение (2.15) два раза по y и пользуясь соответствующими граничными условиями, для функции u_1 получим

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial x}(y^2-1)+(A_1\,\mathrm{sh}\,2ax-A_2\,\mathrm{ch}\,2ax)\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^6}{90}-\frac{23}{45}\right). \tag{2.17}$$

Из третьего уравнения системы (2.14) получим

$$v_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\left(y-\frac{y^3}{3}\right)-2a(A_1\,\mathrm{ch}\,2ax-A_2\,\mathrm{sh}\,2ax)\left(\frac{y^3}{6}+\frac{y^7}{630}-\frac{23}{45}y\right). \tag{2.18}$$

Найдем p_1, для этого имеем

$$v_1(x,1)=kp_1(x).$$

Имея в виду уравнения (2.18), для p_1 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2p_1}{dx^2}-a^2p_1=-\frac{72}{35}a(A_1\,\mathrm{ch}\,2ax-A_2\,\mathrm{sh}\,2ax). \tag{2.19}$$

Решая дифференциальное уравнение (2.19) и пользуясь при определении постоянных интегрирования условиями (1.4), получим для p_1 следующее значение:

$$p_1=\frac{27}{35\nu}U_{ср}^2\,\mathrm{ch}\,ax-\frac{24}{35a}A_1\,\mathrm{ch}\,2ax+\frac{24}{35a}A_2\,\mathrm{sh}\,2ax. \tag{2.20}$$

Подставляя значения p_1 в выражения u_1 и v_1, найдем

$$u_1=\frac{1}{2}\left(\frac{27a}{35\nu}U_{ср}^2\,\mathrm{sh}\,ax-\frac{48}{35}A_1\,\mathrm{sh}\,2ax+\frac{48}{35}A_2\,\mathrm{ch}\,2ax\right)\times$$
$$\times(y^2-1)+(A_1\,\mathrm{sh}\,2ax-A_2\,\mathrm{ch}\,2ax)\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^6}{90}-\frac{23}{45}\right), \tag{2.21}$$

$$v_1=\frac{1}{2}\left(\frac{27}{35\nu}a^2U_{ср}^2\,\mathrm{ch}\,ax-\frac{96}{35}A_1a\,\mathrm{ch}\,2ax+\frac{96}{35}A_2a\,\mathrm{sh}\,2ax\right)\times$$
$$\times\left(y-\frac{y^3}{3}\right)-2a(A_1\,\mathrm{ch}\,2ax-A_2\,\mathrm{sh}\,2ax)\left(\frac{y^3}{6}+\frac{y^7}{630}-\frac{23}{45}y\right). \tag{2.22}$$

Для нахождения третьего приближения имеем следующую систему уравнений:

$$u_0\frac{\partial u_1}{\partial x}+u_1\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_1}{\partial y}+v_1\frac{\partial u_0}{\partial y}=-\nu\frac{\partial p_2}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2u_2}{\partial y^2}, \tag{2.23}$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial y}+\frac{\partial^2v_0}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}=0.$$

Решение системы уравнений (2.23) не представляет особого затруднения, только приходится иметь дело с громоздкими вычислениями. Отметим при этом, что граничными условиями (1.4) для v нужно пользоваться, начиная с третьего приближения. Ограничиваясь вторым приближением и переходя к размерным величинам, для неизвестных функций получим следующие окончательные значения:

$$u(c_1 \operatorname{sh} a_1x - c_2 \operatorname{ch} a_1x - c_3 \operatorname{sh} 2a_1x + c_4 \operatorname{ch} 2a_1x)(\bar{y}^2 - 1) +$$

$$+ \frac{7}{432}(c_3 \operatorname{sh} 2a_1x - c_4 \operatorname{ch} 2a_1x)(45\bar{y}^2 + \bar{y}^6 - 46), \tag{2.24}$$

$$v = (d_1 \operatorname{ch} a_1x - d_2 \operatorname{sh} a_1x - d_3 \operatorname{ch} 2a_1x + d_4 \operatorname{sh} 2a_1x)\left(\bar{y} - \frac{\bar{y}^3}{3}\right) -$$

$$- \frac{7}{432}(d_3 \operatorname{ch} 2a_1x - d_4 \operatorname{sh} 2a_1x)(105\bar{y}^3 + \bar{y}^7 - 322\bar{y}), \tag{2.25}$$

$$p = p_b + (p_н - p_b) \operatorname{ch} a_1x - E_1 \operatorname{sh} a_1x + E_2 \operatorname{ch} a_1x - E_3 \operatorname{ch} 2a_1x +$$

$$+ E_4 \operatorname{sh} 2a_1x, \tag{2.26}$$

$$\text{где } a_1 = \sqrt{\frac{3k\mu}{h^3}},$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(p_н - p_b)\sqrt{\frac{3kh}{\mu}} + \frac{27}{70\nu}\sqrt{3\mu kh}\, U_{cp}^2,$$

$$c_2 = \frac{3}{2} U_{cp},$$

$$c_3 = \frac{9}{35}\sqrt{\frac{3k\mu}{h}}\left[\frac{(p_н - p_b)^2 kh^2}{\mu\nu} + \frac{3U_{cp}^2 h}{\nu}\right],$$

$$c_4 = \frac{54}{35}\,\frac{U_{cp}k(p_н - p_b)h}{\nu},$$

$$d_1 = \frac{3}{2}k(p_н - p_b) + \frac{81}{70}\,\frac{\mu k U_{cp}^2}{\nu},$$

$$d_2 = \frac{U_{cp}}{2}\sqrt{\frac{3\mu k}{h}},$$

$$d_3 = \frac{54}{35}\left[\frac{(p_н - p_b)^2 k^2 h}{\nu} + \frac{3U_{cp}^2 \mu k}{\nu}\right],$$

$$d_4 = \frac{108}{35}\sqrt{\frac{3k\mu}{h}}\cdot\frac{U_{cp}k(p_н - p_b)h}{\nu},$$

$$E_1 = \frac{3U_{cp}}{\sqrt{\frac{3kh}{\mu}}},$$

$$E_2 = \frac{27}{35} \frac{\mu U_{cp}^2}{\nu},$$

$$E_3 = \frac{9}{35} \frac{(p_н - p_b)^2 kh + 3U_{cp}^2 \mu}{\nu},$$

$$E_4 = \frac{54}{35} \frac{U_{cp}(p_н - p_b)}{\nu} \sqrt{\frac{k\mu h}{3}}.$$

3. Пример

Для расчета примем следующие данные:

$$p_b = 0, \; p_н = 10^2 \frac{кг}{м^2}, \quad U_{cp} = 1 \frac{м}{сек}, \quad k = 10^{-5} \frac{м^3}{кг\,сек},$$

$$h = 3 \cdot 10^{-2} м, \quad \nu = 10^{-4} \frac{м^2}{сек}, \; \mu = 10^{-2} \frac{кгсек}{м^2}.$$

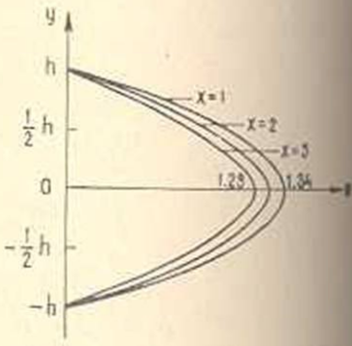
Значения $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $p(x)$ вычисляем по формулам (2.24), (2.25), (2.26).

Законы изменения неизвестных функций представлены на фиг. 2, 3, 4.

По результатам задачи и по приведенному численному примеру можно сделать следующие выводы.

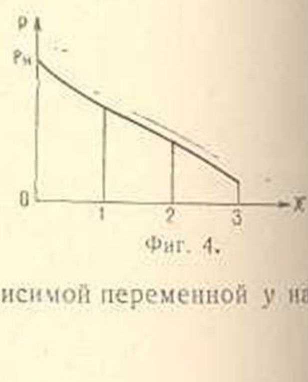
1. Вдоль канала, начиная с начального участка, продольная и поперечная составляющие скорости уменьшаются.

2. Давление вдоль канала по течению уменьшается и обращается в нуль (приравнивается внешнему давлению) в некотором определенном сечении.



Фиг. 2

Фиг. 3.



Фиг. 4.

3. Зависимость давления от независимой переменной y начинается с третьего приближения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15 IV 1964

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՊԱՏԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՀՈՒՆՈՎ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում է մածուցիկ, անսեղմելի հեղուկի լամինար, հարթ առանցքային շարժումը ծակոտկեն պատեր ունեցող հունով: Խնդրի լուծումը բերվում է Նավե—Ստոքսի հավասարումների ինտեգրմանը տրված եզրային պայմաններով: Լուծումը որոնվում է փոքր պարամետրի մեթոդով: Գտնվում են անհայտ ֆունկցիաների համար առաջին երկու մոտավորությունները և ցույց է տրվում, որ մյուս մոտավորությունների գտնելը սկզբունքային դժվարություն չի ներկայացնում:

Ուսումնասիրված է կոնկրետ օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабаджанян Г. А.* и *Назарян А. Г.* Об одном решении задачи плоского ламинарного движения жидкости в открытом канале. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 1, 1959.