

Г. Е. БАГДАСАРЯН, В. Ц. ГЛУНИ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ
 АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим устойчивость анизотропной (неортогортропной) круговой цилиндрической панели радиуса R , нагруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой q и сжатой продольным усилием P .

1. Пусть x, y являются ортогональными координатами, совпадающими с линиями кривизны координатной (срединной) поверхности оболочки, z — расстояние по нормали от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z) .

Предполагается, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной поверхности оболочки.

Оболочку считаем настолько пологой, что геометрия ее средней поверхности не отличается от евклидовой геометрии на плоскости.

В отношении тонкой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей [1] и считается, что прогибы сравнимы с толщиной h [2].

Имеем следующие уравнения устойчивости и неразрывности [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{1}{R} T_{22} + \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + \\ + (T_{11} - T_{11}^0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(T_{12} - T_{12}^0) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + (T_{22} - T_{22}^0) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \quad (1) \\ \frac{\partial^2 z_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z_{22}}{\partial x^2} - \frac{1}{R} x_{22} + x_{11} x_{22} - \frac{1}{4} x_{12}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Здесь

$$T_{11} = c_{11} \varepsilon_{11} + c_{12} \varepsilon_{22} + c_{16} \varepsilon_{12},$$

$$T_{22} = c_{12} \varepsilon_{11} + c_{22} \varepsilon_{22} + c_{26} \varepsilon_{12},$$

$$T_{12} = c_{16} \varepsilon_{11} + c_{26} \varepsilon_{22} + c_{46} \varepsilon_{12}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22} + D_{16}\chi_{12}, \\ M_{22} &= D_{12}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22} + D_{26}\chi_{12}, \\ M_{12} &= D_{16}\chi_{11} + D_{26}\chi_{22} + D_{66}\chi_{12}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

— внутренние усилия и моменты [1],

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{R} w, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

— деформации срединной поверхности оболочки, u, v, w — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения срединной поверхности

$$T_{11}^0 = p, \quad T_{22}^0 = Rq, \quad T_{12}^0 = 0 \quad (1.6)$$

— усилия, характеризующие начальное невозмущенное (безмоментное) состояние,

$$c_{ik} = B_{ik}h, \quad D_{ik} = B_{ik} \frac{h^3}{12} \quad (1.7)$$

— жесткости растяжения и изгиба, B_{ik} — коэффициенты упругости [1,3]. В случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала и главные физические и геометрические направления не совпадают, оболочка качественно работает как произвольно анизотропная. Тогда коэффициенты B_{ik} имеют вид [1,3]

$$\begin{aligned} B_{11} &= B'_{11} \cos^4 \varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B'_{22} \sin^4 \varphi, \\ B_{22} &= B'_{11} \sin^4 \varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B'_{22} \cos^4 \varphi, \\ B_{12} &= B'_{12} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ B_{66} &= B'_{66} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$B_{16} = \frac{1}{2} [B'_{22} \sin^2 \varphi - B'_{11} \cos^2 \varphi + (B'_{12} + 2B'_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi,$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} [B'_{22} \cos^2 \varphi - B'_{11} \sin^2 \varphi - (B'_{12} + 2B'_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi,$$

где φ — угол между главными геометрическими и физическими направлениями, B'_{ik} — коэффициенты упругости при $\varphi = 0$.

Представляя усилия T_{ik} посредством функции напряжения $F = F(x, y)$ следующим образом

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (1.9)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (1.1). На основании (1.4), (1.5) (1.9) из (1.1) получим следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Rq \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \quad (1.10)$$

$$a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^2} + a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0,$$

где

$$a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66}\Omega}, \\ a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66}\Omega}, \quad (1.11) \\ \Omega = \frac{1}{c_{66}^2} [(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{26} - c_{16}c_{22})^2].$$

2. Решение системы (1.10) ищем в виде [2-5]

$$W = f \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \quad (2.1)$$

$$F = \Phi \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s},$$

где s — длина полуволны, α — тангенс угла наклона волн к оси x .

Применяя к системе (1.10) вариационный метод Бубнова-Галеркина, в силу (2.1) получим

$$K \left[1 - \frac{T_{11}^0}{T_{11}^*} - \frac{T_{22}^0}{T_{22}^*} \right] f - \epsilon f^3 + df^3 = 0. \quad (2.2)$$

$$\Phi = \frac{b^2}{\pi^2 R \gamma L_1} f - \frac{J_2 - J_3}{\gamma L_1 J_1} f^2, \quad (2.3)$$

где

$$T_{11}^* = \frac{Kb^2}{\pi^2 \gamma}, \quad T_{11}^0 = \frac{Kb^2}{\pi^2 (1 + \gamma \alpha^2)} \quad (2.4)$$

— верхние критические значения внешних усилий при их независимом действии

$$e = \frac{3\pi^2}{Rb^2L_1} \frac{J_2 - J_1}{J_1}, \quad d = \frac{2\pi^4}{b^4L_1} \frac{(J_2 - J_1)^2}{J_1^2}, \quad \gamma = \frac{b^2}{s^2},$$

$$J_1 = \int_0^x \int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} \sin^2 \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} dx dy,$$

$$J_2 = \int_0^x \int_0^b \sin^3 \frac{\pi y}{b} \sin^3 \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} dx dy,$$

$$J_3 = \int_0^x \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} \cos^2 \frac{\pi(x - \alpha y)}{s} dx dy,$$

$$K = \frac{\pi^4}{b^4} L_2 + \frac{1}{R^2 L_1},$$

$$L_1 = \frac{1}{\gamma^2} [a_{11}\gamma^2 - 2a_{10}\alpha\gamma^2 + (a_{00} - 2a_{12})(\gamma + \alpha^2\gamma^2) - \\ - 2a_{20}(\alpha^3\gamma^2 + 3\alpha\gamma) + a_{22}(\alpha^4\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma + 1)],$$

$$L_2 = D_{11}\gamma^2 - 4D_{10}\alpha\gamma^2 + 2(D_{12} + 2D_{00})(\gamma + \alpha^2\gamma^2) - 4D_{20}(\alpha^3\gamma^2 + 3\alpha\gamma) + \\ + D_{22}(\alpha^4\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma + 1).$$

3. Из уравнения (2.2) получим

$$T = T^* - \bar{e}f + df^2. \quad (3.1)$$

Здесь

$$T = T_{11}^0 = \frac{T_{22}^0}{\alpha}, \quad T^* = \frac{Kb^2}{\pi^2\gamma + \alpha\pi^2(1 + \gamma\alpha^2)}, \quad (3.2)$$

$$\bar{e} = \frac{3(J_2 - J_1)}{R[\gamma + \alpha(1 + \gamma\alpha^2)]L_1J_1}, \quad \bar{d} = \frac{2\pi^2(J_2 - J_1)^2}{b^2[\gamma + \alpha(1 + \gamma\alpha^2)]L_1J_1^2},$$

где T — параметр внешнего усилия, α — некоторый коэффициент, T^* — верхнее критическое усилие.

Зависимости $f = f(T)$ приведены на фиг. 1, 2 соответственно для пластин и оболочек. Неустойчивые решения обозначены пунктирными линиями,

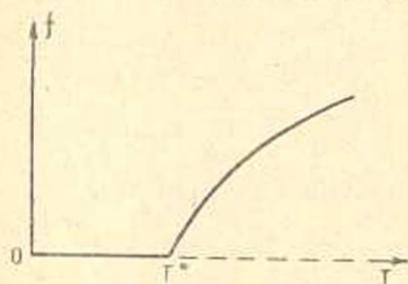
$$T_* = T^* - \frac{\bar{e}^2}{4\bar{d}} \quad (3.3)$$

— нижняя критическая нагрузка.

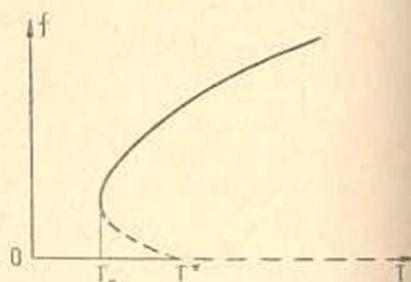
Устойчивость ненулевых решений проверяется обычными методами [2].

Большой интерес представляют те значения параметров α , γ , вблизи которых достигается минимальное значение верхнего или нижнего критического усилия. Однако, в общем случае нахождение минимальных критических параметров связано с почти непреодолимыми трудностями. В каждом конкретном случае минимальные параметры можно найти численными методами.

Отметим, что в случае ортотропной ободочки с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями нижнее и



Фиг. 1.



Фиг. 2.

верхнее критические усилия, а также послекритические прогибы существенно зависят от ориентации главных направлений упругости и являются периодическими функциями угла φ с периодом π . Таким образом, мы имеем реальную возможность регулировать критические параметры, а также послекритические прогибы в зависимости от условий работы конструкций.

В качестве примера рассмотрим ортотропную пластинку, когда главные геометрические и физические направления не совпадают.

Рассматриваются четыре случая комбинаций упругих постоянных

Случай	E_1	E_2	G_{12}
I	$2E$	E	$0.5E$
II	$10E$	E	$0.5E$
III	E	$2E$	$0.5E$
IV	E	$10E$	$0.5E$

При этих данных значения α , γ и соответствующие им минимальные значения критического усилия $\bar{T}_{II}^* = \frac{b^2}{T \cdot E h^3} T_{II}^*$ приведены ниже (табл. 1).

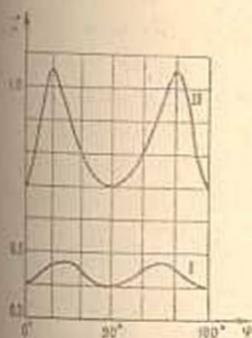
На фиг. 3—5 приведены графики зависимостей $\bar{T}_{II}^*(\varphi)$, $\gamma(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$ для I и II случаев.

На основе приведенных выкладок можно сделать следующие выводы:

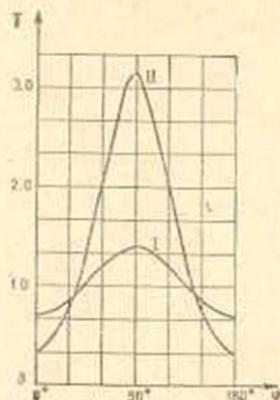
Таблица 1

Случай	φ	φ							
		$0^\circ, 180^\circ$	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
I	\bar{T}_{II}^*	0,4024	0,4618	0,4692	0,4436	0,4024	0,4436	0,4692	0,4618
	α	0	-0,1339	-0,1847	-0,1720	0	0,1720	0,1847	0,1339
	γ	0,7072	0,8578	1,029	1,025	1,414	1,205	1,029	0,8578
II	\bar{T}_{II}^*	0,6937	1,054	0,9416	0,8006	0,6937	0,8006	0,9416	1,054
	α	0	-0,6140	-0,6017	-0,4264	0	0,4264	0,6017	0,6140
	γ	0,3162	0,7504	1,304	2,081	3,162	2,081	1,304	0,7504
III	\bar{T}_{II}^*	0,4024	0,4436	0,4692	0,4618	0,4024	0,4618	0,4692	0,4436
	α	0	0,1720	0,1847	0,1339	0	-0,1339	-0,1847	-0,1720
	γ	1,414	1,205	1,029	0,8578	0,7072	0,8578	1,029	1,205
IV	\bar{T}_{II}^*	0,6937	0,8006	0,9416	1,054	0,6937	1,054	0,9416	0,8006
	α	0	0,4264	0,6017	0,6140	0	-0,6140	-0,6017	-0,4264
	γ	3,162	2,081	1,304	0,7504	0,3162	0,7504	0,304	2,081

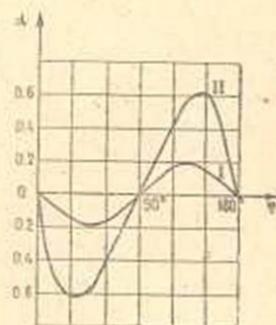
в) $\min_{(\varphi)} [\min_{(\alpha, \gamma)} T_{II}^*]$ достигаются при $\varphi = \frac{k\pi}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то есть когда главные геометрические и физические направления совпадают;



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

б) $\max_{(\varphi)} [\min_{(\alpha, \gamma)} T_{II}^*]$ при $B_{11} > B_{22}$ достигаются вблизи углов $k\pi \leq \varphi_1 \leq k\pi + \frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4} + k\pi \leq \varphi_2 \leq (k+1)\pi$, а при $B_{11} < B_{22}$ — вблизи $k\pi + \frac{\pi}{4} \leq \varphi_1 \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$ и $k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \varphi_2 \leq k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$);

в) если $B_{11} > B_{22}$, то при увеличении B_{11} угол φ_1 приближается к левому пределу, а φ_2 — к правому. Если же $B_{11} < B_{22}$, то с уменьшением B_{11} угол φ_1 приближается к правому пределу, а φ_2 — к левому;

г) характеристики типа $\bar{d}f^2(\varphi, T)$ представляют собой цилиндрические поверхности, образующие которых наклонены под углом 45° относительно плоскости (T, φ) ;

д) величина $\left\{ \max_{(\varphi)} \left[\min_{(\sigma, \gamma)} T_{11}^* \right] - \min_{(\varphi)} \left[\min_{(\sigma, \gamma)} T_{11}^* \right] \right\}$ увеличивается с увеличением отношения B_{11}/B_{22} .

Таким образом, появляется реальная возможность существенного увеличения несущей способности ортотропной конструкции путем оптимального выбора расположения главных направлений упругости материала.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8.X.1964

Գ. Ե. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Վ. Ծ. ԳՆՈՒՆԻ

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱԳԱՆԹԻ ԿՍՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ
ՈՁ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում դիտարկվում է անիզոտրոպ զրանային թաղանթի ոչ-դժար կալունություն խնդիրը: Որպես մասնավոր դեպք դիտարկվում է օրթոտրոպ թաղանթ, որի զլխավոր երկրաչափական և ֆիզիկական առանցքները կազմում են φ անկյուն:

Հաշվված են կրիտիկական պարամետրերը և ետկրիտիկական զլխավոր ճկվածքները: Տույց է տրված, որ φ անկյան համապատասխան բնութագրան դեպքում, կարելի է էապես մեծացնել կրիտիկական պարամետրերը արժեքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М. — Л., 1947.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М. — Л., 1946.
5. Балабух Л. И. Устойчивость фанерных пластинок. Техника воздушного флота № 9, 1937.