ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. А. ШМАТКОВ

ОБ ОДНОМ ИЗ КЛАССОВ КВАЗИГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В работе рассматриваются квазиголоморфные отображения, сохраняющие аналитический характер трех плоскостей. Устанавливается связь между отображениями рассматриваемого типа и отображениями с ограниченным дефектом. Эта связь установлена в теоремах 1 и 2.

Пусть функции

$$(T)\quad w_k = f_k(z_1, z_2),\ k = 1, 2 \tag{1}$$

комплексных переменных z_1 и z_2 дифференцируемы в точке M_0 (z_1^0, z_2^0) и $J_0 = J(z_1^0, z_2^0) \neq 0$, где

$$J(z_1, z_2) = \frac{\partial(w_1, w_2, \overline{w}_1, \overline{w}_2)}{\partial(z_1, z_2, \overline{z}_1, \overline{z}_2)}. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение

$$w_p = \sum_{q=1}^{2} a_{pq} z_q + \overline{b}_{pq} \overline{z}_q,\quad p = 1, 2, \tag{3}$$

где

$$a_{pq} = \left[\frac{\partial f_p(z_1, z_2)}{\partial z_q}\right]_{M_0},\qquad \overline{b}_{pq} = \left[\frac{\partial f_p(z_1, z_2)}{\partial \overline{z}_q}\right]_{M_0}\quad p, q = 1, 2,$$

являющееся дифференциалом отображения (1) в точке $M_0(z_1^0, z_2^0)$.

В [1] (стр. 409) установлено, что если отображение (3) сохраняет аналитический характер плоскостей $z_2 = c_k z_1$, $k = 1, 2, 3$, то оно сохраняет аналитический характер всех плоскостей $z_2 = cz_1$, для которых точки c лежат на сфере P^1 переменного c на окружности, проходящей через точки c_k, $k = 1, 2, 3$.

Мы рассмотрим подобное отображение. Оказывается, что для него после надлежащего поворота системы координат имеют место равенства

$$\overline{b}_{11} = \mu e^{it} a_{12},\ \overline{b}_{12} = \nu e^{it} a_{11},\ \overline{b}_{21} = \mu e^{it} a_{22},\ \overline{b}_{22} = \nu e^{it} a_{21}. \tag{4}$$

Здесь μ и ν — некоторые неотрицательные числа, ε — действительное число. При этом μ и ν могут обращаться в нуль только одновременно (в последнем случае отображение (3) при выполнении равенств (4) сохраняет аналитический характер всех плоскостей, то есть является голоморфным);

$$\mu \geqslant \nu, \quad \mu\nu \neq 0, \quad j = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Последние два соотношения следуют из того, что в рассматриваемом случае

$$J_0 = (1 - \mu\nu)^2 |j|^2. \tag{5}$$

Здесь $j = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ — якобиан голоморфного отображения

$$w_p = \sum_{q=1}^{2} a_{pq} z_q, \quad p = 1, 2, \tag{6}$$

соответствующего данному квазиголоморфному.

Произвольно взятая аналитическая плоскость после применения к ней отображения (3), удовлетворяющего условиям (4), переходит в неаналитическую плоскость. Ее дефект равен величине

$$\operatorname{def}(c, T) = \frac{2\,|A_1\bar{B}_2 - A_2\bar{B}_1|}{\big|\,|A_1|^2 + |A_2|^2 - |B_1|^2 - |B_2|^2\big|}, \tag{7}$$

где

$$A_p = ca_{p1} + a_{p2}, \quad \bar{B}_p = \bar{c}\,b_{p1} + b_{p2}, \; p = 1, 2$$

(см. [1], стр. 411).

Вычисления показывают, что $\operatorname{def}(c, T)$ для отображения (3), удовлетворяющего условиям (4), определяется по формуле

$$\operatorname{def}(c, T) = \left| \frac{2\,|j|\,(\mu c\bar{c} - \nu)}{\alpha(c\bar{c} - \nu^2) + \beta(1 - \mu^2 c\bar{c}) + (1 - \mu\nu)(\gamma c + \bar{\gamma}\bar{c})} \right|, \tag{8}$$

где

$$\alpha = |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2, \quad \beta = |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2, \quad \gamma = a_{11}\bar{a}_{12} + a_{21}\bar{a}_{22}.$$

Из формулы (8), в частности, следует, что отображение (3), удовлетворяющее условиям (4), сохраняет аналитический характер плоскостей c, для которых числа c служат аффиксами точек окружности $c\bar{c} = \frac{\nu}{\mu}$ (на сфере P^1 комплексного переменного c).

Рассмотрим величину

$$D = \frac{c\bar{c}(\alpha - \beta\mu^2) + (1 - \mu\nu)(\gamma c + \bar{\gamma}\bar{c}) - (\alpha\nu^2 - \beta)}{2\,|j|\,(\mu c\bar{c} - \nu)}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что

$$\operatorname{def}(c, T) = \frac{1}{|D|}. \tag{10}$$

Рассмотрим, далее, плоскости c, для которых величина (9) принимает фиксированное значение D. Исходя из соотношения (9), можно показать, что соответствующие точки c сферы Римана лежат на окружности

$$|c - \xi_D|^2 = \left| c + \frac{(1-\mu\nu)\bar{\gamma}}{\alpha - \beta\mu^2 - 2|j|D\mu} \right|^2 = R_D^2 = \frac{4|j|^2\mu\nu(D-D_1)(D-D_2)}{(\alpha - \beta\mu^2 - 2D|j|\mu)^2}, \tag{11}$$

где

$$D_1, D_2 = \frac{(1+\mu\nu)(\nu\alpha - \mu\beta) \pm |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu|j|^2}}{4|j|\mu\nu}. \tag{12}$$

Из (11) следует, что возможные значения D удовлетворяют условию

$$\text{либо } D > \max(D_1, D_2), \text{ либо } D < \min(D_1, D_2). \tag{13}$$

Пусть $\nu\alpha - \mu\beta > 0$, тогда из (12), (13) и неравенства $D \leqslant |D|$ вытекает, что

$$|D| > \frac{(1+\mu\nu)(\mu\beta - \alpha\nu) + |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu|j|^2}}{4|j|\mu\nu}. \tag{14}$$

Пусть теперь $\nu\alpha - \mu\beta < 0$, тогда

$$|D| \geqslant -D > \frac{(1+\mu\nu)(\mu\beta - \nu\alpha) + |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu|j|^2}}{4|j|\mu\nu}. \tag{15}$$

Из неравенств (14) и (15) и равенства (10) вытекает, что во всех случаях имеет место неравенство

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{4|j|\mu\nu}{(1+\mu\nu)|\mu\beta - \nu\alpha| + |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4|j|^2\mu\nu}}. \tag{16}$$

Мы будем рассматривать отображения, близкие к голоморфным, то есть такие, для которых $\mu\nu < 1$ (о геометрическом смысле этого условия см. [1], стр. 410).

Для таких отображений

$$1 - \frac{\sqrt{J}}{|j|} = \mu\nu. \tag{17}$$

Определение 1. Гомеоморфное отображение

$$(T)\ w_p = f_p(z_1, z_2), \quad p = 1, 2,$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_2(k)$, если оно:

1. Сохраняет аналитический характер трех плоскостей,

2. Имеет место неравенство

$$0 < \mu\nu \leqslant k < 1. \tag{18}$$

Определение 2. Гомеоморфное отображение

$$(T) \quad w_p = f_p(z_1, z_2), \; p = 1, 2,$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_1(k)$, если оно:

1. Сохраняет аналитический характер трех плоскостей;

2. Принадлежит к совокупности отображений области D с ограниченным дефектом

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant k, \tag{19}$$

подчиненных дополнительному условию

$$0 < \mu\nu < 1. \tag{20}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если гомеоморфное отображение*

$$(T) \quad w_p = f_p(z_1 z_2), \quad p = 1, 2,$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_2(k)$, то оно принадлежит и к классу $L_1\left(\frac{2\sqrt{k}}{1-k}\right)$.

Доказательство. Из неравенства (16) следует справедливость неравенства

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{1-\mu\nu}. \tag{21}$$

Из неравенств (18) и (21) следует нужное нам неравенство

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2\sqrt{k}}{1-k}. \tag{22}$$

Теорема. 2. *Если гомеоморфное отображение*

$$(T) \; w_p = f_p(z_1, z_2), \; p = 1, 2$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_1(k)$, то оно принадлежит и к классу $L_2\left[\frac{k^2}{(1+\sqrt{1+k^2})^2}\right]$.

Доказательство. Пусть $t = \frac{2|l|}{|\mu\beta - \nu\alpha|}$,

тогда неравенство (16) примет вид

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2t\mu\nu}{1+\mu\nu+|1-\mu\nu|\sqrt{1+t^2\mu\nu}}. \tag{23}$$

Из неравенств (19) и (23) вытекает неравенство

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2t\mu\nu}{1+\mu\nu+|1-\mu\nu|\sqrt{1+t^2\mu\nu}} \leqslant k \tag{24}$$

для любого t.

Фиксируем произведение $\mu\nu < 1$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \frac{2t\mu\nu}{1+\mu\nu+|1-\mu\nu|\sqrt{1+t^2\mu\nu}}. \tag{25}$$

Исследование этой функции показывает, что значение

$$\varphi(\infty) = \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{1-\mu\nu} \tag{26}$$

будет наибольшим для всех t.

Из неравенства (24) и равенства (26) вытекает нужное нам неравенство

$$\mu\nu \leqslant \frac{k^2}{(1+\sqrt{1+k^2})^2}. \tag{27}$$

Пример. Примером отображения рассмотренного типа, не сводящегося к линейному отображению, является отображение

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}(z_1 + \lambda\bar{z}_1 + 3\lambda\bar{z}_2) + \frac{1}{2}\left[z_1 + z_2 + 2\lambda(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\right]^2,$$

$$w_2 = \sqrt[4]{3}(z_2 + \lambda\bar{z}_1 - \lambda\bar{z}_2) + \frac{1}{2}\left[z_1 + z_2 + 2\lambda(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)\right]^2, \tag{28}$$

где λ — произвольное комплексное число.

Нетрудно проверить, что функции (28) во всем пространстве C_z^2 удовлетворяют условиям

$$|at - qc| = |br - dp|, \ \arg\left(\begin{vmatrix} a & q \\ c & t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & r \\ d & p \end{vmatrix}\right) = 2\arg\begin{vmatrix} a & p \\ c & r \end{vmatrix},$$

$$\arg\begin{vmatrix} a & p \\ c & r \end{vmatrix} = \arg\begin{vmatrix} b & q \\ d & t \end{vmatrix} + \pi \tag{29}$$

(см. [1], стр. 203).

Здесь

$$a = \frac{\partial w_1}{\partial z_1}, \ b = \frac{\partial w_1}{\partial z_2}, \ p = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}_1}, \ q = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}_2},$$

$$c = \frac{\partial w_2}{\partial z_1}, \ d = \frac{\partial w_2}{\partial z_2}, \ t = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}_1}, \ r = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}_2}.$$

При выполнении этих условий дифференциал отображения (28) сохраняет аналитический характер всех плоскостей $z_2 = cz_1$, для которых числа c служат аффиксами точек окружности (на сфере P комплексного переменного c)

$$|c-1|=4. \tag{30}$$

При самом отображении (28) все плоскости вида $z_2=cz_1$, где c—параметр, удовлетворяющий условию (30), переходят в неаналитические поверхности, однако их касательные плоскости в начале координат являются аналитическими.

Так как в начале координат $J_0=(1-4|\lambda|^2)^2$, то верхняя граница значений def (c, T) дается формулой

$$\max_{c\in P^1} \operatorname{def}(c, T)=\frac{4|\lambda|}{|1-4|\lambda|^2|}. \tag{31}$$

Поэтому, если

$$|\lambda|<\frac{\varepsilon}{8}<\frac{1}{2},$$

для отображения (28) в начале координат $\max\limits_{c\in P^1} \operatorname{def}(c, T)<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда в силу непрерывности $\max\limits_{c\in P^1} \operatorname{def}(c, T)$ отображение (28) принадлежит к классу квазиголоморфных отображений $L_2(\varepsilon)$ в некоторой окрестности начала координат.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила 15 X 1964

Ս. Ա. ՇՄԱՏԿՈՎ

ՔՎԱԶԻՀՈԼՈՄՈՐՖ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԻՑ ՄԵԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում են այնպիսի քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումներ, որոնք պահպանում են երեք հարթությունների անալիտիկ բնույթը: Հաստատվում է առնչություն դիտարկվող տիպի արտապատկերումների և ամենափոքր դեֆեկտով արտապատկերումների միջև: Այդ առնչությունը հաստատված է 1 և 2 թեորեմներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Б. А.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. ГИТТЛ, М.—Л., 1963.