ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

К. А. АБГАРЯН

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ К КВАЗИДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ И РАЗЛОЖЕНИЕ ЕЕ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

1. В статье излагается достаточно простой метод приведения квадратной матрицы к квазидиагональному виду. Идеи метода коротко изложены в заметке [1]. Здесь этот вопрос рассматривается более подробно и с несколько иных позиций, а именно, обоснование метода проводится без использования теоремы Сильвестра о разложении квадратной матрицы на составляющие.

2. Пусть собственные числа матрицы u порядка n разбиты на p групп вида $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$, $\left(\sigma = 1, 2, \cdots, p;\ \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ при условии, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)} - \lambda_j^{(s)}| \geq c > 0. \tag{1}$$

$$(\sigma \neq s;\ i = 1, 2, \cdots, k_\sigma;\quad j = 1, 2, \cdots, k_s).$$

Каждой группе σ поставим в соответствие матрицу

$$\Delta_\sigma(u) = \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq\sigma}}^{p} \prod_{j=1}^{k_s} (u - \lambda_j^{(s)} E_n), \ (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{2}$$

Ранг матрицы $\Delta_\sigma(u)$, а также ранг любой целой степени этой матрицы, на основании теоремы о дефекте функции от матрицы (см. [2], стр. 130, теорема 8) равен k_σ. Поэтому матрицу $\Delta_\sigma(u)$ можно представить как произведение матрицы K_σ типа $n \times k_\sigma$ с k_σ линейно независимыми столбцами на матрицу $M_{0\sigma}$ типа $k_\sigma \times n$ с k_σ линейно независимыми строками:

$$\Delta_\sigma(u) = K_\sigma M_{0\sigma}. \tag{3}$$

Из равенства

$$\Delta_\sigma^2(u) = K_\sigma M_{0\sigma} K_\sigma M_{0\sigma}$$

видно, что квадратная матрица $M_{0\sigma} K_\sigma$ порядка k_σ является невырожденной матрицей.

Введем в рассмотрение матрицу

$$M_\sigma = (M_{0\sigma} K_\sigma)^{-1} M_{0\sigma}. \tag{4}$$

Легко показать, что

$$\left.\begin{aligned} M_\sigma K_\sigma &= E_{k_\sigma}, \\ M_\sigma K_s &= 0, \ (\sigma \neq s) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(E_l — единичная матрица порядка l).

Первое из этих равенств сразу получается умножением (4) справа на K_σ. Для доказательства второго равенства заметим, что

$$\Delta_\sigma(u)\,\Delta_s(u) = 0, \quad (\sigma \neq s), \tag{6}$$

так как из произведения $\Delta_\sigma\Delta_s$ при $\sigma \neq s$ можно выделить множитель $\prod\limits_{\nu=1}^{p}\prod\limits_{l=1}^{k_\nu}(u - \lambda_l^{(\nu)}E_n)$, который, согласно теореме Гамильтона—Кэли, равен нулю. Используя равенство (4), будем иметь

$$K_\sigma M_{0\sigma}K_s M_{0s} = K_\sigma M_{0\sigma}K_\sigma M_\sigma K_s M_{0s} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что K_σ состоит из k_σ линейно независимых столбцов, M_{0s} — из k_s линейно независимых строк, а $M_{0\sigma}K_\sigma$ является невырожденной матрицей, непосредственно следует второе из равенств (5). Введем коагулированные матрицы

$$K = (K_1, K_2, \cdots, K_p), \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}.$$

Ввиду равенств (5), имеем

$$MK = KM = E_n. \tag{7}$$

Представим тождество

$$u = KMuKM$$

следующим образом:

$$u = K\begin{pmatrix} M_1uK_1 & M_1uK_2 \cdots M_1uK_p \\ M_2uK_1 & M_2uK_2 \cdots M_2uK_p \\ \cdots & \cdots \\ M_puK_1 & M_puK_2 \cdots M_puK_p \end{pmatrix}M.$$

При $\sigma \neq s$ субматрица

$$M_\sigma uK_s = M_\sigma uK_s M_{0s}K_s(M_{0s}K_s)^{-1} = M_\sigma K_s M_{0s}uK_s(M_{0s}K_s)^{-1} = 0;$$

(матрицы u и $K_sM_{0s} = \Delta_s(u)$ как многочлены от одной и той же матрицы перестановочны друг с другом).

Поэтому

$$u = K\begin{pmatrix} M_1uK_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2uK_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_puK_p \end{pmatrix}M. \tag{8}$$

Обозначим

$$\Lambda_\sigma = M_\sigma uK_\sigma. \tag{9}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_p \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тогда

$$u = K\Lambda M = K\Lambda K^{-1}. \tag{11}$$

Таким образом, посредством матрицы K матрица u приводится к квазидиагональному виду Λ.

3. Матрицы u и Λ, как подобные матрицы, имеют одни и те же собственные числа.

Покажем, что собственные числа матрицы Λ_σ суть собственные числа матрицы u, включенные в группу σ.

Пусть λ_l — собственное число матрицы Λ_σ. Тогда $\Lambda_\sigma - \lambda_l E_{k_\sigma}$ — вырожденная матрица.

Предположим, что λ_l не принадлежит группе σ. Тогда $u - \lambda_l E_n$ является множителем $\Delta_\sigma(u)$. Имея в виду, что, как нетрудно проверить,

$$M_\sigma (u - \lambda_l E_n) = (\Lambda_\sigma - \lambda_l E_{k_\sigma}) M_\sigma \tag{12}$$

и

$$(u - \lambda_l E_n) K_\sigma = K_\sigma (\Lambda_\sigma - \lambda_l E_{k_\sigma}), \tag{13}$$

представим матрицу $M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma$ в виде

$$M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma = \prod_{\lambda_l \neq \lambda_r^{(\sigma)}} (\Lambda_\sigma - \lambda_l E_{k_\sigma}).$$

$$(r = 1, 2, \cdots, k_\sigma)$$

Согласно сделанному предположению, среди множителей правой части этого равенства имеется вырожденная матрица $\Lambda_\sigma - \lambda_l E_{k_\sigma}$. Поэтому $M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma$ — вырожденная матрица. Но, с другой стороны,

$$M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma = M_\sigma K_\sigma M_{0\sigma} K_\sigma = M_{0\sigma} K_\sigma,$$

причем, как было показано выше, $M_{0\sigma} K_\sigma$ — невырожденная матрица. Полученное противоречие доказывает, что любое собственное число матрицы Λ_σ есть собственное число матрицы u, включенное в группу σ.

Пусть теперь λ_j — собственное число матрицы u, включенное в группу σ.

Предположим, что λ_j не является собственным числом матрицы Λ_σ. Тогда λ_j должно быть собственным числом хотя бы одной из остальных матриц Λ_i. Пусть это будет Λ_s $(s \neq \sigma)$. Но тогда, по доказанному выше, λ_j принадлежит группе s. Оказалось, что λ_j принадлежит одновременно двум различным группам σ и s, что противоречит условию (1). Таким образом, имеет место и обратное предложение, а именно, всякое собственное число матрицы u, включенное в группу σ, является собственным числом матрицы Λ_σ.

4. Равенство (11) можно представить и так:

$$u = \sum_{\sigma=1}^{p} R_{\sigma}, \tag{14}$$

где

$$R_{\sigma} = K_{\sigma}\Delta_{\sigma}M_{\sigma}. \tag{15}$$

Матрицы R_{σ} $(\sigma = 1, 2, \cdots, p)$ удовлетворяют равенствам

$$R_{\sigma}^{m} = K_{\sigma}\Lambda_{\sigma}^{m}M_{\sigma} \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{16}$$

$$R_{\sigma}\cdot R_{s} = 0, \quad (\sigma \neq s), \tag{17}$$

$$uR_{\sigma} = R_{\sigma}u = R_{\sigma}^{2}. \tag{18}$$

Рассмотрим матрицы

$$P_{\sigma} = K_{\sigma}M_{\sigma}, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{19}$$

Имеют место следующие легко доказываемые соотношения:

$$P_{\sigma}^{m} = P_{\sigma}, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p; \quad m = 1, 2, \cdots); \tag{20}$$

$$P_{\sigma}\cdot P_{s} = 0, \quad (\sigma \neq s); \tag{21}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{p} P_{\sigma} = E_{n} \tag{22}$$

и, наконец,

$$uP_{\sigma} = P_{\sigma}u = R_{\sigma}, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{23}$$

Отсюда следует, что матрицы P_{σ} $(\sigma = 1, 2, \cdots, p)$ можно рассматривать как операторы выбора, с помощью которых можно выделить любую из p составляющих R_{σ} матрицы u, соответствующих p непересекающимся группам собственных чисел матрицы u.

Отметим, что

$$\Delta_{\sigma}P_{\sigma} = P_{\sigma}\Delta_{\sigma} = \Delta_{\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{24}$$

5. *Примечание 1.* Пусть $f(\lambda)$ — функция скалярного аргумента λ, определенная на спектре матрицы u. Тогда, так как u и Λ подобны,

$$f(u) = Kf(\Lambda)M \tag{25}$$

и

$$f(u) = \sum_{\sigma=1}^{p} K_{\sigma}f(\Delta_{\sigma})M_{\sigma}. \tag{26}$$

Примечание 2. В качестве матрицы K_{σ} может быть взята любая матрица, составленная из k_{σ} линейно независимых столбцов матрицы $\Delta_{\sigma}(u)$ или из k_{σ} линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы $\Delta_{\sigma}(u)$. Матрица K_{σ} может быть заменена матрицей вида $K_{\sigma}B_{\sigma}$, где B_{σ} — произвольная невырожденная матрица порядка k_{σ}. При этом, очевидно, вместо матрицы M_{σ} следует взять матрицу $B_{\sigma}^{-1}M_{\sigma}$. С другой стороны, как легко показать, если $\Delta_{\sigma} = K_{\sigma}M_{0\sigma}$ и $\Delta_{\sigma} = \widetilde{K}_{\sigma}\widetilde{M}_{0\sigma}$, то существует невырожденная матрица B_σ порядка k_σ такая, что $\tilde{K}_\sigma = K_\sigma B_\sigma$. Поэтому матрицы $K_\sigma B_\sigma$, $B_\sigma^{-1} M_\sigma$ и $B_\sigma^{-1} \Lambda_\sigma B_\sigma$, где B_σ — произвольная невырожденная матрица порядка k_σ, можно рассматривать как общий вид матриц, осуществляющих разложение (26).

Интересно отметить, что R_σ и P_σ не зависят от B_σ. Действительно, в соответствии с формулами (15), (9) и (19), получим

$$R_\sigma = K_\sigma B_\sigma (B_\sigma^{-1} M_\sigma u K_\sigma B_\sigma) \cdot B_\sigma^{-1} M_\sigma = K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma;$$

$$P_\sigma = K_\sigma B_\sigma B_\sigma^{-1} M_\sigma = K_\sigma M_\sigma.$$

Примечание 3. Матрицы $\Delta_\sigma(u)$, а следовательно, и матрицы K_σ, Λ_σ, M_σ, вообще говоря, являются комплекснозначными. Но можно разбивку собственных чисел на группы произвести так, что перечисленные выше матрицы будут составлены только из действительных чисел. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы любые два комплексно сопряженные собственные числа матрицы u были включены в одну и ту же группу.

Примечание 4. При соответствующем разбиении собственных чисел на группы из формулы (26) могут быть получены формулы Сильвестра. В частности, если все собственные числа матрицы u простые, то, предполагая, что каждая группа состоит только из одного собственного числа, равенство (26) легко приводится к виду

$$f(u) = \sum_{\sigma=1}^{p} f(\lambda_\sigma) \frac{\Delta_\sigma(u)}{\Delta_\sigma(\lambda)},$$

что представляет собой формулу Сильвестра в случае простых собственных чисел.

Примечание 5. Как известно [3], матрица I_σ, ортогонально проектирующая n-мерное пространство R_n на k_σ-мерное инвариантное подпространство $R_{\sigma n}$, соответствующее собственным числам $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ матрицы u, может быть представлена в виде

$$I_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_n - u)^{-1} d\lambda,$$

где γ_σ — спрямляемая замкнутая дуга, проходящая в комплексной плоскости на положительном расстоянии от спектра матрицы u и отделяющая собственные числа $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ от остальных собственных чисел матрицы u. Легко показать, что построенные выше матрицы P_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ в точности совпадают с матрицами I_σ.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & B_2 & \cdots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots B_p \end{pmatrix}$$

— квазидиагональная матрица, приводящая квазидиагональную матрицу Λ к форме Жордана $\bar{\Lambda}$.

Тогда

$$(\lambda E_n - u)^{-1} = \sum_{s=1}^{p} K_s B_s^{-1} (\lambda E_{k_s} - \bar{\Lambda}_s)^{-1} B_s M_s.$$

Используя теорему о составном контуре и учитывая, что $\bar{\Lambda}_s$ имеет форму Жордана, получим

$$\oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_{k_s} - \bar{\Lambda}_s)^{-1} d\lambda = \begin{cases} 2\pi i E_{k_\sigma}, & (s = \sigma); \\ 0, & (s \neq \sigma). \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_n - u)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{p} K_s B_s^{-1} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_{k_s} - \bar{\Lambda}_s)^{-1} d\lambda B_s M_s = K_\sigma M_\sigma = P_\sigma.$$

Примечание 6. Пусть $u(\tau)$ — матрица, элементы которой в промежутке $[a, b]$ k раз дифференцируемы по параметру τ.

Тогда представление матрицы $\Delta_\sigma(u)$ в виде произведения двух матриц K_σ и $M_{0\sigma}$ (см. (3)) можно выполнить так, что матрицы K_σ, M_σ, Λ_σ будут также k раз дифференцируемы. Это вытекает из следующих соображений:

а) матрица P_σ k раз дифференцируема, что следует из равенства

$$P_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_n - u)^{-1} d\lambda;$$

б) существуют k раз дифференцируемые матрицы K_σ и M_σ, такие что $P_\sigma = K_\sigma M_0$ (K_σ — матрица типа $n \times k_\sigma$ ранга k_σ, а M_σ — матрица типа $k_\sigma \times n$ ранга k_σ).

Если, например, в рассматриваемом промежутке $[a, b]$ линейная независимость каких-нибудь (но одних и тех же) k_σ столбцов матрицы P_σ не нарушается, то достаточно взять в качестве матрицы K_σ матрицу, составленную из этих k_σ столбцов. В общем случае всегда можно набрать матрицу K_σ из таких k_σ линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы P_σ с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от τ, что будет обеспечена k раз дифференцируемость матриц K_σ, M_σ, а следовательно, и матрицы Λ_σ (см. (9));

в) любая матрица K_σ, которая является множителем P_σ, является множителем $\Delta_\sigma(u)$ и наоборот.

6. Рассмотрим один частный случай. Пусть собственные числа матрицы u разбиты на группы при условии (1) таким образом, что в каждую группу включены только равные собственные числа, и допу

сим, что все элементарные делители характеристической матрицы $u-\lambda E_n$ линейны.

В этом случае имеет место равенство

$$(u-\lambda^{(\sigma)}E_n)\,\Delta_\sigma(u)=0. \tag{27}$$

(Здесь через $\lambda^{(\sigma)}$ обозначено общее значение равных собственных чисел, включенных в группу σ).

Используя формулы (3), (4) и (13), отсюда получим

$$K_\sigma(\Lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})\,M_{0\sigma}K_\sigma M_\sigma=0.$$

Умножим последнее равенство слева на M, а справа на K. Тогда в левой части равенства получим коагулированную матрицу, у которой все клетки кроме одной, которую занимает субматрица $(\lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})\,M_{0\sigma}K_\sigma$, являются нулевыми матрицами. Учитывая, что в правой части равенства стоит нулевая матрица, будем иметь

$$(\Lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})\,M_{0\sigma}K_\sigma=0$$

или, так как $M_{0\sigma}K_\sigma$ — невырожденная матрица,

$$\Lambda_\sigma=\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma}. \tag{28}$$

Отсюда видно, что Λ_σ — диагональная матрица, диагональными элементами которой служат равные собственные числа, включенные в группу σ.

Матрица K_σ состоит из k_σ линейно независимых собственных векторов матрицы u. Действительно,

$$(u-\lambda^{(\sigma)}E_n)\,K_\sigma=K_\sigma(\Lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})=0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае изложенный метод приводит к известному результату, а именно, если все элементарные делители характеристической матрицы $u-\lambda E_n$ линейны, то посредством матрицы, составленной из собственных векторов матрицы u, последняя приводится к диагональному виду.

7. В качестве примера приведем к квазидиагональному виду и разложим на составляющие матрицу

$$u=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 5 & -4\\ -15 & 5 & 6 & -3\\ -12 & 4 & 9 & -10\\ -6 & 2 & 5 & -6\end{pmatrix}.$$

а. Собственные числа этой матрицы $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=-2$ разобьем, например, на следующие две группы:

группа 1: $\lambda_1^{(1)}=1,\quad \lambda_2^{(1)}=-1,$

группа 2: $\lambda_1^{(2)}=2,\quad \lambda_2^{(2)}=-2.$

$$\Delta_1(u) = (u - \lambda_1^{(2)} E_4)(u - \lambda_2^{(2)} E_4) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 0 \\ -9 & 9 & -6 & 3 \\ -12 & 12 & -9 & 6 \\ -6 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(u) = (u - \lambda_1^{(1)} E_4)(u - \lambda_2^{(1)} E_4) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 3 \\ -12 & 12 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразующая матрица

$$K = (K_1 K_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = K^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и далее

$$\Lambda_1 = M_1 u K_1 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = M_2 u K_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица K преобразует матрицу u к виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Составляющие матрицы u:

$$R_1 = K_1 \Lambda_1 M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & -12 \\ 3 & -3 & 10 & -17 \\ 4 & -4 & 13 & -22 \\ 2 & -2 & 7 & -12 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = K_2 \Lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 & 8 \\ -18 & 8 & -4 & 14 \\ -16 & 8 & -4 & 12 \\ -8 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

в. Приведем теперь матрицу u к диагональному виду. Для этого разобьем собственные числа на четыре группы:

$$\lambda^{(1)} = 1; \qquad \lambda^{(2)} = -1; \qquad \lambda^{(3)} = 2; \qquad \lambda^{(4)} = -2$$

$$\Delta_1(u) = (u - \lambda^{(2)} E_4)(u - \lambda^{(3)} E_4)(u - \lambda^{(4)} E_4) = \begin{pmatrix} -12 & 12 & -24 & 36 \\ -18 & 18 & -36 & 54 \\ -24 & 24 & -48 & 72 \\ -12 & 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(u) = (u - \lambda^{(1)} E_4)(u - \lambda^{(3)} E_4)(u - \lambda^{(4)} E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -18 & 36 \\ 0 & 0 & -24 & 48 \\ 0 & 0 & -30 & 60 \\ 0 & 0 & -18 & 36 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3(u) = (u - \lambda^{(1)} E_4)(u - \lambda^{(2)} E_4)(u - \lambda^{(4)} E_4) = \begin{pmatrix} -36 & 24 & -12 & 24 \\ -72 & 48 & -24 & 48 \\ -72 & 48 & -24 & 48 \\ -36 & 24 & -12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_4(u) = (u - \lambda^{(1)} E_4)(u - \lambda^{(2)} E_4)(u - \lambda^{(3)} E_4) = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 & 24 \\ -36 & 0 & 0 & 36 \\ -24 & 0 & 0 & 24 \\ -12 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразующая матрица

$$K = (K_1 K_2 K_3 K_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$M_1 = (1 \quad -1 \quad 2 \quad -3), \qquad M_2 = (0 \quad 0 \quad -1 \quad 2),$$

$$M_3 = (-3 \quad 2 \quad -1 \quad 2), \qquad M_4 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad -1).$$

Без вычислений ясно, что $\Lambda_1 = \lambda^{(1)} = 1$; $\Lambda_2 = \lambda^{(2)} = -1$; $\Lambda_3 = \lambda^{(3)} = 2$; $\Lambda_4 = \lambda^{(4)} = -2$. Поэтому

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Составляющие матрицы

$$R_1 = K_1 \Lambda_1 M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 6 & -9 \\ 4 & -4 & 8 & -12 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = K_2\Delta_2M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = K_3\Delta_3M_3 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 & 4 \\ -12 & 8 & -4 & 8 \\ -12 & 8 & -4 & 8 \\ -6 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = K_4\Delta_4M_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Московский ордена Ленина
авиационный институт им. С. Орджоникидзе

Поступила 16 IX 1964

Կ. Ա. ԱՐԶԱՐՅԱՆ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻ ԲԵՐՈՒՄԸ ՔՎԱԶԻԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՔԻ ԵՎ ՆՐԱ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է n կարգի u քառակուսային մատրիցան, որի սեփական թվերը կարող են բաժանվել p չփոխհատվող խմբերի։

Շարադրվում է այդ մատրիցայի հետևյալ տեսքով պատկերման մեթոդը.

$$u = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma \tag{1}$$

կամ, որ համարժեք է.

$$u = K\Lambda M, \tag{2}$$

որտեղ՝

$$M_\sigma K_s = \begin{cases} E_{k_\sigma}, & (\sigma = s) \\ 0, & (\sigma \neq s) \end{cases} \tag{3}$$

$$MK = KM = E_n, \tag{4}$$

k_σ-ն σ խմբում ընդգրկված սեփական թվերի քանակն է, E_l-ն l կարգի միավոր մատրից է, K_σ-ն, Δ_σ-ն և M_σ-ն համապատասխանաբար $n\times k_\sigma$, $k_\sigma\times k_\sigma$ և $k_\sigma\times n$ տիպի մատրիցաներ են։

K-ն, Λ-ն և M-ը n կարգի հետևյալ տեսքի մատրիցներ են՝

$$K(K_1 \cdots K_p), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}:$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Асимптотическое расщепление уравнений регулируемого процесса при медленном изменении параметров регулируемого объекта и системы регулирования. ДАН СССР, 158, № 3, 1964.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1953.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.