ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 1, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Ц. ГНУНИ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрены задачи статической и динамической устойчивости ортотропных неоднородных гибких оболочек.

§ 1. Предполагается, что ортотропная оболочка произвольно оперта по контуру* и симметрично неоднородна по толщине. Динамическая устойчивость рассматриваемой оболочки в первом приближении описывается уравнением [1]

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2\left[1 - \frac{T_{11}^{\circ}(t)}{T_{11*}} - \frac{T_{22}^{\circ}(t)}{T_{22*}}\right] f - ef^2 + df^3 = 0, \qquad (1.1)$$

где ω — частота собственных свободных колебаний, T_{ii*} — критические значения усилий T_{ii}° при их независимом статическом действии, ε — коэффициент линейного затухания.

Здесь введены следующие обозначения [1, 2]:

$$\omega^2 = \frac{K}{A_0 + A^{\circ}}, \qquad T_{11*} = \frac{K}{A_4}, \qquad T_{22*} = \frac{K}{A_5}, \qquad K = \frac{A' A_1' + A_2 A_2'}{A_1},$$

$$e = \frac{A_2 A_3' + A_2' A_3}{(A_0 + A^{\circ}) A_1}, \qquad d = \frac{A_3 A_3'}{(A_0 + A^{\circ}) A_1}, \qquad (1.2)$$

$$A_1 = \int_0^a \int_0^b \left(a_{11} X_n^{IV} Y_m + a_3 X_n'' Y_m'' + a_{22} X_n Y_m^{IV}\right) X_n Y_m \, d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$A_1' = \int_0^a \int_0^b \left(D_{11} V_m U_n^{IV} + D_3 U_n'' V_m'' + D_{22} U_n V_m^{IV}\right) U_n V_m \, d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$A_2 = -\int_0^a \int_0^b \left(k_1 U_n V_m'' + k_2 U_n'' V_m\right) X_n Y_m \, d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$A_2' = -\int_0^a \int_0^b \left(k_1 X_n Y_m'' + k_2 X_n'' Y_m\right) U_n V_m \, d\alpha_1 d\alpha_2. \qquad (1.3)$$

* Вариации усилий на контуре оболочки равны нулю.

$$(T-T^*)f+\bar{e}f^2-\bar{d}f^3=0, \tag{2.1}$$

где введены обозначения

$$T=\overset{\circ}{T}_{11}=\frac{\overset{\circ}{T}_{22}}{\varkappa},\quad T^*=\frac{K}{A_4+\varkappa A_5},\qquad \bar{e}=\frac{A_2A_3'+A_2'A_3}{A_1(A_4+\varkappa A_5)},$$

$$\bar{d}=\frac{A_3A_3'}{A_1(A_4+\varkappa A_5)}. \tag{2.2}$$

Здесь T^* — верхнее критическое усилие, T — параметр усилий, $\varkappa$ — некоторый коэффициент.

Исследование уравнения (2.1) показывает, что нижнее критическое усилие достигается при

$$\bar{f}=\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_3}+\frac{A_2'}{A_3'}\right) \tag{2.3}$$

и определяется формулой

$$T_*=T^*-\frac{\bar{e}^2}{4\bar{d}}. \tag{2.4}$$

В случае шарнирно-опертых оболочек формула (2.3) принимает вид

$$\bar{f}=\frac{9}{64}\left(k_1a^2\frac{m}{n}+k_2b^2\frac{n}{m}\right). \tag{2.3'}$$

Из формул (2.3) и (2.3′) замечаем, что значение $\bar{f}$ в явном виде не зависит от физических свойств оболочки. Однако, при минимальных критических параметрах существенно ортотропной неоднородной оболочки m и n, а следовательно, и $\bar{f}$ зависят от коэффициентов упругости.

Отметим, что в пределах $T_*<T<T^*$ каждому значению усилия соответствуют три положения упругого равновесия. В этих пределах начальное невозмущенное состояние устойчиво по отношению к малым возмущениям, а при больших возмущениях оболочка может быть „заброшена“ на деформированное устойчивое положение.

Устойчивость ненулевых решений проверяется обычными методами [3].

В качестве числового примера рассмотрим шарнирно-опертую ортотропную трехслойную цилиндрическую оболочку радиуса R, характерные размеры которой суть $a=b=3.1416$ *м*, $\delta_1=\delta_3=0.03$ *м*, $\delta_2=0.01$ *м*.

Упругие постоянные материала каждого слоя оболочки приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Слои	E_1 (*кг/м*^{2})	E_2	G	ν_{12}	ν_{21}	γ (*кг/м*^{3})
I, III	$1178,40\cdot10^6$	$58,92\cdot10^6$	$50,00\cdot10^6$	0,60	0,03	817
II	$58,92\cdot10^6$	$1178,40\cdot10^6$	$50,00\cdot10^6$	0,03	0,60	817

При этих данных и при $\varkappa = 0$ имеем таблицу 2.

Таблица 2

R	T^* (*кг/м*)	T_*
10	53322	24350
25	31695	27062
∞	27576	27576

Рассматривая формулы (2.2), (2.4) и табл. 2, замечаем, что с увеличением пологости оболочки значение верхнего критического усилия уменьшается, а нижнего — увеличивается, и оба стремятся соответственно сверху и снизу к значению критического усилия пластинки.

Большой практический интерес представляет определение значений $\overline{n}$ и $\overline{m}$, при которых достигаются минимальные значения верхних и нижних критических усилий.

В случае шарнирно-опертых пластинок при $\varkappa = 0$ имеем [4]

$$\overline{n} = \frac{a}{b}\left(\frac{D_{22}}{D_{11}}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \overline{m} = 1. \tag{2.5}$$

В случае же оболочек значения $\overline{n}$ и $\overline{m}$ следует определять из систем нелинейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial T^*}{\partial m} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial T_*}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial T_*}{\partial m} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2.6}$$

соответственно для верхней и нижней критических усилий.

Значения $\overline{n}$ и $\overline{m}$ в случае ортотропных слоистых пластинок и оболочек зависят от отношений типа $\frac{E_i}{E_1}$, $\frac{\delta_i}{\delta_1}$, $\frac{a}{b}$, что дает возможность более свободного выбора оптимальных физических и геометрических параметров пластинок и оболочек в зависимости от условий их работы.

§ 3. Принимая

$$T_{ii}(t) = T_{ii0} + T_{iit}\cos\theta t, \tag{3.1}$$

из уравнения динамической устойчивости (1.1) получим уравнение параметрически возбуждаемых колебаний

$$f'' + 2\varepsilon f' + \Omega^2(1 - 2\mu\cos\theta t) f - ef^2 + df^3 = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\Omega^2 = \omega^2\left(1 - \frac{T_{110}T_{22*} + T_{220}T_{11*}}{T_{11*}T_{22*}}\right), \qquad \mu = \frac{1}{2}\,\frac{T_{11t}T_{22*} + T_{22t}T_{11*}}{T_{11*}T_{22*} - T_{110}T_{22*} - T_{220}T_{11*}}. \tag{3.3}$$

Асимметрия нелинейной характеристики уравнения (3.2) приводит к возможности существования резонансных колебаний для частот, меньших критических.

Уравнение типа (3.2) впервые получено В. В. Болотиным при рассмотрении задачи параметрически возбуждаемых колебаний гибкой сферической панели [5]. Отмечается, что характер установления резонансных колебаний оболочек качественно отличается от характера установления резонансных колебаний пластинок, и приводится примерный график зависимости амплитуды установившихся колебаний от возбуждающей частоты.

Ищем решения уравнения (3.2) в виде

$$f = f_{01} + f_{11}\cos\left(\frac{\theta t}{2} - \varphi_1\right), \qquad f = f_{02} + f_{12}\sin\left(\frac{\theta t}{2} - \varphi_2\right), \tag{3.4}$$

соответственно для нижней и верхней границ главной области неустойчивости

$$\theta_*^2 \approx 4\Omega^2\left(1 \mp \sqrt{\mu^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\Omega^2}}\right). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.4) в уравнение (3.2), после выделения постоянных членов и гармоник получим следующую нелинейную систему алгебраических уравнений:

$$df_{0i}^3 - ef_{0i}^2 + \Omega^2 f_{0i} - \frac{1}{2}(e - 3df_{0i})f_{1i}^2 = 0,$$

$$f_{1i}^3 - \frac{1}{3d}\left[\theta^2 - 4\Omega^2(1 + (-1)^i\mu) - 4\varepsilon\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi_i\right]f_{1i} - \frac{4}{3d}(2ef_{0i} - 3df_{0i}^2)f_{1i} = 0,$$

$$\varphi_i = -(-1)^i \arcsin\frac{\varepsilon\theta}{\mu\Omega^2}. \tag{3.6}$$

В первом приближении, принимая $f_{0i} \ll f_{1i}$ [7] и пренебрегая нелинейными членами функции f_{0i}, из первого уравнения системы (3.6) будем иметь

$$f_{0i} = \frac{ef_{1i}^2}{2\Omega^2 + 3df_{1i}^2}. \tag{3.7}$$

С учетом этого из третьего уравнения (3.6) для f_{1i} получим выражение

$$f_{1i}^2 = \frac{1}{6d}\Big\{\theta^2 - 4\Omega^2(1 + (-1)^i\mu) - 4\varepsilon\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi_i + A \pm$$

$$\pm\Big(\left[\theta^2 - 4\Omega^2(1 + (-1)^i\mu) - 4\varepsilon\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi_i + A\right]^2 +$$

$$+ 8\Omega^2\left[\theta^2 - 4\Omega^2(1 + (-1)^i\mu) - 4\varepsilon\theta\,\mathrm{tg}\,\varphi_i\right]\Big)^{1/2}\Big\} \tag{3.8}$$

или при $\varepsilon = 0$

$$f_{1i}^2 = \frac{1}{6d}\left[\theta^2 - \theta_{*i}^2 + A \pm \sqrt{(\theta^2 - \theta_{*i}^2 + A)^2 + 8\Omega^2(\theta^2 - \theta_{*i}^2)}\right], \tag{3.9}$$

где

$$A = \frac{8e^2}{3d} - 2\Omega^2. \tag{3.10}$$

Рассматривая (3.8), (3.9), нетрудно заметить, что при $A < 0$ для f_{1l}^2 имеем только одно положительное значение. Характер установления резонансных колебаний оболочки качественно не отличается от характера установления резонансных колебаний пластинки.

В случае $A > 0$ после потери устойчивости наблюдается падение возбуждающей частоты до некоторого критического значения $\bar{\theta}_{*l}$, которое определяется из уравнения*

$$(\bar{\theta}_{*l}^2 - \theta_{*l}^2 + A)^2 + 8\Omega^2(\bar{\theta}_{*l}^2 - \theta_{*l}^2) = 0. \tag{3.11}$$

Обнаруживаются резонансные колебания при частотах, меньших критических.

Устойчивость ненулевых решений проверяется обычными методами [8, 9].

Условие $A = 0$ определяет значение пологости оболочки, до которого резонансные колебания невозможны при $\theta < \theta_*$.

В случае пластинок $A = -2\Omega^2$. Таким образом, в пределах

$$-2\Omega^2 \leqslant A \leqslant 0 \tag{3.12}$$

оболочка работает как пластинка.

Решив уравнение (3.11), для нижних критических частот получим

$$\bar{\theta}_{*l}^2 = \theta_{*l}^2 - 2\left(\frac{2e}{\sqrt{3d}} \mp \Omega^2\right). \tag{3.13}$$

Этим частотам по формуле (3.9) соответствуют значения амплитуд колебаний

$$\bar{f}_{1l}^2 = \pm\frac{1}{6d}\left(\frac{8e\Omega}{\sqrt{3d}} \mp 4\Omega^2\right). \tag{3.14}$$

Рассматривая формулу (3.14), замечаем, что первое значение (верхние знаки) нижней критической частоты для амплитуд колебаний дает действительное значение при $A > 0$, а второе—действительных значений не дает. Таким образом, для нижней критической частоты главного параметрического резонанса и соответствующего ей значения амплитуд колебаний имеем

$$\bar{\theta}_{*l}^2 = \theta_{*l}^2 - 2B^2, \qquad \bar{f}_{1l}^2 = \frac{2\Omega}{3d}B, \qquad \bar{f}_{0l} = \frac{e}{3d}\,\frac{B}{\Omega + B}, \tag{3.15}$$

где

$$B = \frac{2e}{\sqrt{3d}} - \Omega.$$

Из условия (3.12) определим степень пологости оболочки, до которой динамический хлопок невозможен.

Для простоты выкладок предположим, что

* Для простоты выкладок рассматривается консервативная задача.

$$\Omega^2 = \omega^2, \qquad k_1 = k, \qquad k_2 = \chi k, \tag{3.16}$$

где k — параметр пологости, χ — некоторый коэффициент.

С учетом (3.16) представим частоту собственных колебаний в виде

$$\omega^2 = a_1 + k^2 a_2, \tag{3.17}$$

где

$$a_1 = \frac{L_1}{M}, \qquad a_2 = \frac{(\mu_m^2 + \chi\lambda_n^2)^2}{ML_2}. \tag{3.18}$$

Из формул (1.5), (1.6) получим следующее выражение для отношения

$$\frac{e^2}{d} = \frac{9}{2} k^2 a_2. \tag{3.19}$$

Подставив найденные значения ω^2 и e^2/d в формулу (3.10), при $A=0$ получим

$$k_*^2 = a_1/5a_2, \tag{3.20}$$

то есть в пределах $0 < k < k_*$ динамический хлопок невозможен.

Таким образом, предположение $f_0 \ll f_1$ позволило получить простые формулы для нижних критических частот и амплитуд установившихся резонансных колебаний.

Отказываясь от этого предположения, нелинейную систему алгебраических уравнений (3.6), при $\varepsilon = 0$, перепишем в виде

$$\varphi_{0i}^3 - \frac{1}{10d}\left(\theta^2 - \theta_{*i}^2 + 2\Omega^2 + \frac{2}{3}\frac{e^2}{d}\right)\varphi_{0i} + \frac{e}{15d^2}\left(\frac{2}{9}\frac{e^2}{d} - \Omega^2\right) = 0, \tag{3.21}$$

$$f_{1i}^2 = \frac{\theta^2 - \theta_{*i}^2}{3d} + Z_i. \tag{3.22}$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi_{0i} = f_{0i} - \frac{e}{3d}, \qquad Z_i = \frac{4e^2}{9d^2} - 4\varphi_{0i}^2. \tag{3.23}$$

Неравенство $Z_i(\theta_{*i}) > 0$ определяет условие, при котором на границах областей динамической неустойчивости возможны резонансные колебания для достаточно больших возмущений.

Решая уравнение (3.21) относительно θ^2, получим

$$\theta^2 = \theta_{*i}^2 - 2\Omega^2 - \frac{2e^2}{3d} + 10\,d\varphi_{0i}^2 - \frac{2e}{3d}\left(\Omega^2 - \frac{2e^2}{9d}\right)\frac{1}{\varphi_{0i}}, \tag{3.24}$$

причем минимальное значение $\overline{\theta}_{*i}^2$ достигается при

$$\overline{\varphi}_{0i} = \sqrt{\frac{e}{30d^2}\left(\frac{2e^2}{9d} - \Omega^2\right)}. \tag{3.25}$$

Рассмотрим трехслойную ортотропную цилиндрическую оболочку радиуса $R = 25$ *м* при упругих и геометрических данных, приведенных в § 2. Пусть

$$T_{110} = 15000 \ кг/м, \quad T_{11t} = 6678{,}0 \ кг/м, \quad T_{220} = T_{22t} = 0,$$

тогда

$$\Omega^2 = 3338{,}1 \ 1/сек^2, \quad \mu = 0{,}2.$$

Отсюда для верхних критических частот главной области параметрического резонанса получим значения

$$\theta_{*1}^2 = 10682 \ 1/сек^2, \quad \theta_{*2}^2 = 16023 \ 1/сек^2.$$

Нижние критические частоты, определенные по формулам (3.15) и (3.24)—(3.25), соответственно будут

$$\begin{aligned} &\bar{\theta}_{*1}^2 = 10427 \ 1/сек^2, \quad \bar{\theta}_{*2}^2 = 15768 \ 1/сек^2, \\ и \quad &\bar{\theta}_{*1}^2 = 10368 \ 1/сек^2, \quad \bar{\theta}_{*2}^2 = 15709 \ 1/сек^2. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Рассматривая (3.26), замечаем, что формулы (3.15), полученные на основе полунелинейного метода [7], для нижних критических частот дают достаточно хорошие значения (погрешность 0,5 %).

В заключение отметим, что условия максимума ширины области главного параметрического резонанса приводят к нахождению минимальных значений верхних критических усилий в зависимости от m и n.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 VI 1964

Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՓՈՔՐ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված են օրթոտրոպ անհամասեռ թաղանթների ստատիկ և դինամիկ կայունության ոչ գծային խնդիրներ։

Հաշված են ստորին ու վերին կրիտիկական պարամետրերը և հետկրիտիկական վիճակի ճկվածքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1, 1960.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. *Болотин В. В.* Устойчивость тонкостенной сферической оболочки под действием периодического давления. Расчеты на прочность. Машгиз, выпуск 2, 1958.
6. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.

7. *Муштари Х. М.* Средний изгиб пологой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие на своей плоскости ребра. Известия КФАН СССР, серия физ.-мат. наук, № 12, 1958.
8. *Мишенков Г. В.* О динамической устойчивости пологих упругих оболочек. Инженерный журнал, **1**, выпуск 2, 1961.
9. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. ИЛ, 1957.