

Г. В. ГЕНДЖОЯН

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. В настоящей работе дается метод построения приближенных решений типа С. А. Чаплыгина для следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} P(u) = -\Delta u + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) &= 0 \quad x \in D \\ u|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь D — ограниченная область евклидова пространства E_m с достаточно гладкой границей Γ . Для таких задач, благодаря линейности главной части уравнения, изучение вопросов существования решений и их единственности существенно облегчается. Относящиеся сюда результаты [1, 2] более полны, получены сравнительно раньше, чем для более общих квазилинейных уравнений.

Решению задачи (1.1) приближенными методами, близкими к рассматриваемому нами, посвящены работы Кошелева А. И. [3, 4], в которых исследуется применение метода последовательных приближений, и работа Мысовских И. П. [5]. В последней работе задача (1.1) решается методом Чаплыгина, но функция f предполагается не зависящей от производных $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Когда f зависит нелинейно от $\frac{\partial u}{\partial x_i}$,

само построение чаплыгинских приближений принципиально осложняется. В настоящей работе рассматривается именно этот случай: функция f нелинейно зависит от u и ее производных. При этом доказывается сходимость чаплыгинских приближений к решению, тем самым устанавливается существование последнего.

Укажем обозначения, которыми будем пользоваться. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — точки в области D . Расстояние между ними обозначим через r : $r = |x - \xi|$. ρ_ξ означает расстояние точки ξ до границы Γ области D . Открытый шар с центром в точке ξ и радиусом ρ_ξ обозначим через k_ξ . Буквой k обозначим постоянные при оценке тех или иных величин. Индекс у линейной дифференциальной операции над функцией, зависящей от двух переменных, указывает по какому переменному идет дифференцирова-

ние: например, $\Delta_x u(x, \xi)$ — оператор Лапласа от $u(x, \xi)$ по переменному x . Часто для краткости записи будем употреблять обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = f_u,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} = f_{u_{x_i}}, \quad \sum_k a_k b_k = a_k b_k, \quad f(x, u, u_{x_i}) = f(u).$$

Смысл обозначений $\hat{C}_{(D)}^{(v)}$, $C_{(D)}^{(b)}$, $C_{(D)}^{(k, \alpha)}$, $\hat{W}_p^l(D)$ — общепринятый [6, 7]. Ниже мы рассмотрим случай $m > 2$. Определим класс Z_m как множество линейных дифференциальных операций L над функциями от $C^2(D)$, имеющих вид $Lu = -\Delta u + a_i(x)u_{x_i} + b(x)u$, где $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $b(x)$ — измеримые в D функции, удовлетворяющие оценкам: $|a_i(x)| \leq M$, $0 \leq b(x) \leq M$.

2°. Предварительно докажем следующие леммы.

Пусть ядро $R(x, \xi)$, определенное в $\bar{D} \times \bar{D}$, удовлетворяет требованиям:

а) $R(x, \xi) \geq 0$ при $x, \xi \in \bar{D}$,

б) $R(x, \xi) = 0$ при $x \in \Gamma$, $\xi \in \bar{D}$,

в) $R(x, \xi)$ является функцией Леви для уравнения $\Delta u = 0$. При

этом разность $g(x, \xi) = R(x, \xi) - \frac{1}{(m-2)v_m} \cdot \frac{1}{r^{m-2}}$, где v_m — площадь поверхности m -мерной сферы единичного радиуса, удовлетворяет оценкам вида $g(x, \xi) = O(r^{2+\alpha-m})$ ($0 < \alpha < 1$),

г) $\Delta_x g(x, \xi) \geq M \sum_i |R_{x_i}(x, \xi)| + MR(x, \xi)$.

Здесь M — некоторая положительная постоянная.

Определим функцию $w(x)$ формулой

$$w(x) = \int_D R(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (2.1)$$

где предполагается, что $\varphi(\xi)$ принадлежит классу $C_{(D)}^{(0, \alpha')}$ ($0 < \alpha' < 1$).

Лемма 1. Функция $w(x)$, определенная формулой (2.1), удовлетворяет условиям:

1. $w(x) \geq 0$ (≤ 0), если $\varphi(x) \geq 0$ (≤ 0),

2. $w(x)|_\Gamma = 0$,

3. $w(x) \in C_{(D)}^{(2, \mu)}$, ($\mu < \alpha$, $\mu \leq \alpha'$),

4. Для любой операции L из класса Z_m верны соотношения:

$$Lw(x) - \varphi(x) \leq 0 \quad (\geq 0), \quad \text{если } \varphi(x) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Доказательство. Справедливость утверждений 1 и 2 очевидна. Для проверки условия 3 перепишем формулу (2.1) в виде

$$w(x) = \int_D g(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{(m-2)v_m} \int_D \frac{\varphi(\xi)}{r^{m-2}} d\xi = w_1(x) + w_2(x).$$

По определению функция $g(x, \xi)$ дважды непрерывно дифференцируема в области D , кроме точки $x = \xi$, причем для ее производных имеют место оценки вида

$$\frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x_i} = O(r^{1+\alpha-\alpha_i}), \quad \frac{\partial^2 g(x, \xi)}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{\alpha-\alpha_i-\alpha_j}). \quad (2.2)$$

Следовательно, функцию $w_1(x)$ можно дважды дифференцировать под знаком интеграла. Более того, обычными методами теории потенциала устанавливается, что $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i \partial x_j}$ принадлежит классу $C_{(D)}^{(0, \mu)}$ ($\mu < \alpha$). Таким же путем легко убедиться, что $w_2(x)$ дважды дифференцируема под знаком интеграла и $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_i \partial x_j}$ принадлежит $C_{(D)}^{(0, \alpha')}$ [6].

При этом имеет место соотношение

$$\Delta w(x) = \int_D \Delta_x g(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x). \quad (2.3)$$

Таким образом, условие 3 выполнено.

Утверждение 4 вытекает из формулы

$$\begin{aligned} Lw - \varphi &= -\Delta w + a_i(x) w_{x_i} + b(x) w - \varphi(x) = \\ &= \int_D [-\Delta_x g(x, \xi) + a_i(x) R_{x_i}(x, \xi) + b(x) R(x, \xi)] \varphi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

с учетом того, что $R(x, \xi)$ удовлетворяет требованию г).

Лемма II. При подходящем выборе положительных чисел N, α, β ($0 < \alpha < 1$), ($0 < \beta < d^{-\alpha}$; d — диаметр области D), ядро, определенное в D формулой

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{\frac{Nr}{r-\rho_\xi}} \frac{1}{(m-2)\gamma_m} \left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) & \text{при } x \in K_\xi \\ 0 & \text{при } x \notin K_\xi \end{cases}$$

удовлетворяет требованиям а), б), в), г).

Доказательство. Выполнение требований а) и б) очевидно. Функция $G(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема по x в D при фиксированном ξ . Разность

$$g(x, \xi) = G(x, \xi) - \frac{1}{(m-2)\gamma_m} \frac{1}{r^{m-2}}$$

и ее производные удовлетворяют оценкам, предъявляемым к функции Леви, так что требование в) выполнено. Заметим, что выполнение требования г) надо проверить лишь в шаре K_ξ . В этом шаре $g(x, \xi)$ и $G(x, \xi)$ являются функциями только от r . Производя соответствующие вычисления, будем иметь (индекс ξ при ρ опускаем):

$$\begin{aligned}
G_r(x, \xi) &= \left[-\frac{N\rho}{(\rho-r)^2} \left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\beta(m-2-\alpha)}{r^{m-1-\alpha}} - \frac{m-2}{r^{m-1}} \right) \right] \frac{e^{\frac{Nr}{r-\rho}}}{(m-2)\gamma_m}, \\
\Delta_x g(x, \xi) &= G_{r,r} + \frac{m-1}{r} G_r = \\
&= \left[\left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) \left(N^2 \frac{\rho^2}{(\rho-r)^4} - \frac{2N\rho}{(\rho-r)^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{N\rho}{(\rho-r)^2} \left(\frac{m-3}{r^{m-1}} - \frac{\beta(m-3-2\alpha)}{r^{m-1-\alpha}} \right) + \frac{\beta\alpha(m-2-\alpha)}{r^{m-\alpha}} \right] \frac{e^{\frac{Nr}{r-\rho}}}{(m-2)\gamma_m}, \\
I_1 &= \Delta_x g(x, \xi) - M \sum |G_{x_i}(x, \xi)| - MG(x, \xi) > \Delta_x g(x, \xi) - \\
&\quad - Mm |G_r(x, \xi)| - MG(x, \xi) = \left[\left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left(\frac{N^2\rho^2}{(\rho-r)^4} - \frac{2N\rho}{(\rho-r)^3} - \frac{NMm\rho}{(\rho-r)^2} - M \right) + \frac{\beta\alpha(m-2-\alpha)}{r^{m-\alpha}} + \\
&\quad \left. + \frac{N\rho}{(\rho-r)^2} \left(\frac{m-3}{r^{m-1}} - \frac{\beta}{r^{m-1-\alpha}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - Mm \left(\frac{m-2}{r^{m-1}} - \frac{\beta(m-2-\alpha)}{r^{m-1-\alpha}} \right) \right] \frac{e^{\frac{Nr}{r-\rho}}}{(m-2)\gamma_m}.
\end{aligned}$$

Элементарный анализ последней формулы показывает, что для $m \geq 3$ по фиксированным α и β ($0 < \alpha < 1$), ($0 < \beta < d^{-\alpha}$) можно определить такое $N_0(\alpha, \beta, M)$, что для $N \geq N_0$ имеет место условие $I_1 \geq 0$. Лемма доказана.

3°. Накладываем на функцию $f(x, u, u_{x_i})$ ограничения: f геллерово-непрерывна по x с показателем α' ($0 < \alpha' < 1$) в области $x \in D$, $u^2 + \text{grad}^2 u < \infty$, имеет непрерывные производные $f_u, f_{u_{x_i}}$, удовлетворяющие в той же области условиям:

$$0 \leq f_u \leq M, \quad |f_{u_{x_i}}| \leq M \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (3.1)$$

где M — некоторая постоянная.

Заметим, что при таких ограничениях легко доказать единственность классического решения задачи (1.1), то есть решения из пространства $C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$. Действительно, если u и v — такие решения, то для $\eta = u - v$ имеем

$$-\Delta \eta + f_{u_{x_i}} \eta_{x_i} + f_u \eta = 0, \quad \eta|_{\Gamma} = 0.$$

В силу условия $f_u > 0$ по теореме Хопфа получим $\eta \equiv 0$.

Следуя С. А. Чаплыгину, функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям: $P(u(x)) \geq 0$ (≤ 0), $u(x)|_{\Gamma} = 0$, назовем верхней (нижней) функцией задачи (1.1) [часто их называют суперрешением (субрешением) задачи]. Рассуждениями, аналогичными только что приведенным при доказательстве единственности решения, легко убедиться, что для любой пары u, v нижних и верхних функций выполняется неравенство $u \leq v$. В частности, если задача имеет решение u^* , то оно, являясь одновременно и нижней и верхней функцией, удовлетворяет соотношениям $u \leq u^* \leq v$. Покажем, что классы нижних и верхних функций непусты. Применяя формулу Тейлора, для выражения $P(u)$ получим

$$P(u) = -\Delta u + f(x, u, u_{x_i}) = -\Delta u + f_{u_{x_i}} u_{x_i} + f_u u + f(x, 0, 0).$$

Пусть $|f(x, 0, 0)| \leq k_1$. Тогда легко видеть, что если неотрицательная функция $v_0(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ удовлетворяет дифференциальному неравенству $L_1 u = -\Delta u - M \sum |u_{x_i}| - k_1 \geq 0$, то она является верхней. Тогда функция $u_0(x) \equiv -v_0(x)$ будет нижней функцией задачи. Построим функцию $v_0(x)$. Ищем ее в виде $v_0(x) = e^{N_1} - e^{N_1 \omega(x)}$, где положительное число N_1 и функцию $\omega(x)$ выберем ниже.

Имеем

$$\begin{aligned} L_1 v_0 &\geq \{(N_1 \Delta \omega + N_1^2 \text{grad}^2 \omega) - M N_1 m |\text{grad} \omega| \} e^{N_1 \omega(x)} - k_1 = \\ &= \left\{ N_1 \Delta \omega + \left(N_1 |\text{grad} \omega| - \frac{M m}{2} \right)^2 - \frac{M^2 m^2}{4} \right\} e^{N_1 \omega(x)} - \\ &- k_1 \geq \left(N_1 \Delta \omega - \frac{M^2 m^2}{4} \right) e^{N_1 \omega(x)} - k_1. \end{aligned}$$

Определим $\omega(x)$ как решение задачи $\Delta \omega = C_1$, $\omega|_{\Gamma} = 1$, где C_1 ($C_1 > 0$) выберем так, чтобы $\omega(x)$ удовлетворяла условиям $0 \leq \omega(x) \leq 1$. Тогда, очевидно, по C_1 и M можно выбрать N_1 так, чтобы выполнялось соотношение $L_1 v_0 \geq 0$. Остается построить функцию $\omega(x)$. Введем новую функцию $z(x)$: $z(x) = \omega(x) - 1$, тогда $\Delta z = C_1$, $z|_{\Gamma} = 0$. Следовательно, $z(x) = -C_1 \int_D G_0(x, \xi) d\xi$, где $G_0(x, \xi)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Выбирая

$$C_1 = \frac{1}{\max_x \int_D G_0(x, \xi) d\xi},$$

будем иметь $0 \leq \omega(x) \leq 1$. Теперь легко видеть, что $v_0(x)$ — верх-

ная функция. Заметим, что функции $v_0(x)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют условию 3 ($0 < \mu < 1$) леммы 1.

Перейдем к построению алгоритма для чаплыгинских приближений. Обозначим поправки $u_{n+1} - u_n = \delta u_n$, $v_{n+1} - v_n = \delta v_n$. Обычно δu_n , δv_n ищутся как решения некоторых линейных задач, связанных специальным образом с линеаризацией задачи (1.1) (см. [8]). Здесь мы определим их непосредственно через ядро $G(x, \xi)$ формулами

$$\begin{aligned}\delta u_n(x) &= - \int_D G(x, \xi) P(u_n(\xi)) d\xi \\ \delta v_n(x) &= - \int_D G(x, \xi) P(v_n(\xi)) d\xi.\end{aligned}\quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Параметр α , входящий в определение ядра $G(x, \xi)$, выберем из условия: $\alpha > \alpha'$, где α' — показатель гельдеровской непрерывности функции $f(x, u, u_{x_i})$ по x .

В качестве начальных приближений могут быть взяты любые нижние и верхние функции, например, построенные выше. Проверим, что действительно формулы (3.2) определяют монотонные, двусторонние приближения. Достаточно убедиться, что выполнены условия: а') из $P(u_n) \leq 0$ следует $P(u_{n+1}) \leq 0$, из $P(v_n) \geq 0$ — неравенство $P(v_{n+1}) \geq 0$, б') $\delta u_n|_\Gamma = \delta v_n|_\Gamma = 0$, в') $\delta u_n \geq 0 \geq \delta v_n$.

Пусть $u_n(x)$ и $v_n(x)$ удовлетворяют условию 3 ($\mu = \alpha'$) леммы I. Благодаря ограничениям, наложенным на $f(u)$, функции $P(u_n(\xi))$ и $P(v_n(\xi))$ будут принадлежать классу $C_{(D)}^{(\alpha, \alpha')}$. Тогда из лемм I и II будет следовать, что функции $\delta u_n(x)$, $\delta v_n(x)$ и, следовательно, $u_{n+1}(x)$, $v_{n+1}(x)$ удовлетворяют условию 3 леммы I и $\delta u_n(x) \geq 0 \geq \delta v_n(x)$, $\delta u_n|_\Gamma = \delta v_n|_\Gamma = 0$.

Для проверки условия а') напомним, например, $P(u_{n+1})$ в виде

$$P(u_{n+1}) = -\Delta \delta u_n + f_{u_{x_i}}(\delta u_n)_{x_i} + f_u \delta u_n + P(u_n) = L_2 \delta u_n + P(u_n).$$

Операция L_2 , очевидно, принадлежит классу Z_M . Так как $\delta u_n(x)$ определяется формулой (3.2), то из утверждения 4 леммы I следует, что $P(u_{n+1}) \leq 0$.

Точно также проверяется условие $P(v_{n+1}) \geq 0$. Таким образом, установлено, что формулами (3.2) определяются последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$u_n \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_1 \leq v_0.$$

Докажем, что последовательности $\{u_n(x)$, $v_n(x)$ сходятся к решению.

Рассуждения мы проведем только для последовательности $u_n(x)$, так как для $v_n(x)$ они совершенно аналогичны.

Пусть $k_2 = \max [|u_0(x)|, |v_0(x)|]$. Тогда выполнено условие $|u_n| \leq k_2$. Отсюда и из условий (3.1) следует неравенство

$$|f(u_n)| \leq k_3 \operatorname{grad}^2 u_n + k_4. \quad (3.3)$$

В свою очередь, отсюда вытекает справедливость дифференциального неравенства для $u_n(x)$

$$-\Delta u_n(x) - k_3 \operatorname{grad}^2 u_n - k_4 \leq 0. \quad (3.4)$$

Введем новую функцию $w_n(x)$: $u_n(x) = \frac{1}{k_2} \ln w_n(x)$. Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e^{-k_2 k_4} &\leq w_n \leq e^{k_2 k_4}, & w_n|_{\Gamma} &= 1, & w_n &\leq w_{n+1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &= \frac{1}{k_2 w_n} \frac{\partial w_n}{\partial x_i}, & \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2} &= -\frac{1}{k_2 w_n^2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{k_2 w_n} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Неравенство (3.4) для $w_n(x)$ принимает вид

$$\Delta w_n + k_3 k_4 w_n - \Delta w_n + k_2 w_n \geq 0. \quad (3.6)$$

Покажем равномерную ограниченность норм $\|\operatorname{grad} u_n\|_{L_\infty}^2 = \int_B \operatorname{grad}^2 u_n(\xi) d\xi$.

В силу условий (3.5) достаточно показать равномерную ограниченность норм $\|\operatorname{grad} w_n\|_{L_\infty}$. Из неравенства (3.6) для произвольных n и $p > n$, вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \int_B (\Delta w_n + k_3 w_n) w_n d\xi &\leq \int_B (\Delta w_p + k_3 w_p) w_p d\xi, \\ \int_B (\Delta w_p + k_3 w_p) w_n d\xi &\leq \int_B (\Delta w_p + k_3 w_p) w_p d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям с учетом условий $w_n|_{\Gamma} = w_p|_{\Gamma} = 0$, получим

$$\begin{aligned} k_2 \int_B w_n^2 d\xi - \int_B \operatorname{grad}^2 w_n d\xi &\leq k_3 \int_B w_n w_p d\xi - \int_B \operatorname{grad} w_n \operatorname{grad} w_p d\xi, \\ k_3 \int_B w_n w_p d\xi - \int_B \operatorname{grad} w_p \operatorname{grad} w_n d\xi &\leq k_3 \int_B w_p^2 d\xi - \int_B \operatorname{grad}^2 w_p d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_B (\operatorname{grad}^2 w_p - \operatorname{grad}^2 w_n) d\xi \leq k_3 \int_B (w_p^2 - w_n^2) d\xi,$$

из которого, очевидно, вытекает соотношение $\|\operatorname{grad} w_n\|_{L_2} \leq k_0$.

Докажем, что последовательность норм $\|P(u_n)\|_{L_2} = \|-\Delta u_n + f(u_n)\|_{L_2}$ сходится к нулю, откуда в силу условий $\|\operatorname{grad} u_n\|_{L_2} \leq k_1$

(3.3) и неравенства Бернштейна-Ладженской будет следовать равномерная ограниченность норм $\|u_n\|_{\omega_2^2}$. Для этой цели рассмотрим более подробно связь между $P(u_{n+1})$ и $P(u_n)$. Подставляя в равенство

$$P(u_{n+1}) = P(u_n) - \Delta \delta u_n + f_{u_{x_i}} (\delta u_n)_{x_i} + f_u \delta u_n$$

выражение δu_n из (3.2), согласно пункту 2° будем иметь

$$P(u_{n+1}(x)) = \int_D [\Delta_x g(x, \xi) - f_{u_{x_i}} G_{x_i}(x, \xi) - f_u G(x, \xi)] P(u_n(\xi)) d\xi.$$

Из оценок пункта 2° для функций $g(x, \xi)$ и $G(x, \xi)$ следует, что подинтегральное выражение представляет собою непрерывную в D , кроме точки $\xi = x$, функцию с особенностью в этой точке типа

$\frac{1}{|x - \xi|^{m-2}}$. Поэтому $P(u_{n+1})$ можно записать в виде

$$P(u_{n+1}(x)) = \int_D \frac{\omega(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} P(u_n(\xi)) d\xi, \quad (3.7)$$

где $\omega(x, \xi)$ — непрерывная неотрицательная функция в $\bar{D} \times \bar{D}$. Монотонная последовательность $u_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta u_i(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится всюду в $\bar{D}$. Это означает, что для любого $x \in \bar{D}$ сходится ряд

$\int_D G(x, \xi) \sum_i P(u_i(\xi)) d\xi$. По теореме Леви последовательность функций

$G(x, \xi) P(u_n(\xi))$ при фиксированном $x \in \bar{D}$ почти всюду по ξ сходится в D к нулю.

Покажем, что отсюда вытекает сходимость к нулю почти всюду по ξ в D для самой последовательности $P(u_n(\xi))$.

Пусть D' — строго внутренняя подобласть в D и $x \in \bar{D}'$. В шаре $|\xi - x| < \frac{\rho_x}{3}$ функция $G(x, \xi) \geq k_x > 0$, следовательно, $P(u_n(\xi))$ сходит-

ся к нулю почти всюду по ξ в этом шаре. $\bar{D}'$ можно покрыть конечной системой таких шаров, поэтому $P(u_n(\xi))$ в D' почти всюду сходится к нулю. Но так как D можно представить как счетную сумму областей типа D' , то отсюда и следует, что $P(u_n(\xi))$ сходится к нулю почти всюду в D .

По теореме Лебега она сходится к нулю и по мере.

Теперь с помощью формулы (3.7), используя только что установленную сходимость по мере, легко доказать сходимость к нулю последовательности $\|P(u_n(x))\|_{L_1}$. В самом деле, по заданным ε и δ выберем $N = N(\varepsilon, \delta)$ так, чтобы для $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ выполнялось соотношение

$$\text{mes } D(|P(u_n(\xi))| \geq \varepsilon) \leq \delta.$$

Обозначим множества $D(|P(u_n(\xi))| \geq \varepsilon)$ ($n > N(\varepsilon, \delta)$) через τ_n . Перепишем соотношение (3.7) в виде

$$|P(u_{n+1}(x))| = \int_{\tau_n} \frac{w(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} |P(u_n(\xi))| d\xi + \\ + \int_{D \setminus \tau_n} \frac{w(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} |P(u_n(\xi))| d\xi = w_3 + w_4.$$

Оценим нормы $\|w_3\|_{L_2}$ и $\|w_4\|_{L_2}$.

$$\|w_3\|_{L_2}^2 \leq \int_D \left(\int_{\tau_n} \frac{w^2(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \int_{\tau_n} \frac{|P(u_n(\xi))|^2}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \right) dx \leq \\ \leq \mu^2(\tau_n) \int_D \int_{\tau_n} \frac{|P(u_n(\xi))|^2}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi dx.$$

Интегрируя сначала по x (теорема Фубини), затем по ξ , получим

$$\|w_3\|_{L_2}^2 \leq \mu^2(\tau_n) \int_{\tau_n} |P(u_n(\xi))|^2 \int_D \frac{dx}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \leq \mu^2(\tau_n) k_8^2 \|P(u_n)\|_{L_2}^2, \\ \|w_4\|_{L_2}^2 \leq \varepsilon^2 \int_D \left(\int_{D \setminus \tau_n} \frac{w(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \right)^2 dx \leq \varepsilon^2 K_9^2.$$

То есть имеют место оценки

$$\|P(u_{n+1})\|_{L_2} \leq \|w_3\|_{L_2} + \|w_4\|_{L_2} \leq \mu(\tau_n) k_8 \|P(u_n)\|_{L_2} + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|P(u_n)\|_{L_2}.$$

Выбирая $N(\varepsilon, \delta)$ настолько большим, чтобы $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 1$, нетрудно убедиться, что из формулы $\|P(u_{n+1})\|_{L_2} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|P(u_n)\|_{L_2}$ будет следовать ограниченность последовательности $\|P(u_n)\|_{L_2}$. А отсюда, ввиду того, что ε_1 и ε_2 можно взять произвольно малыми за счет выбора $N(\varepsilon, \delta)$, следует, что $\|P(u_n)\|_{L_2} \rightarrow 0$.

По теоремам вложения Соболева можно из $\{u_n(x)\}$ выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $u_*(x)$ по норме пространства $\tilde{W}_2^1$. Так как $\{u_n(x)\}$ — монотонная последовательность, то она сама сходится к $u_*(x)$ по норме этого пространства [8].

Установим, что предельная функция $u_*(x)$ является решением задачи (1.1). Из соотношения $\|P(u_n)\|_{L_2} \rightarrow 0$ непосредственно получаем

$$\lim_n \int_D G_0(x, \xi) [-\Delta u_n(\xi) + f(u_n(\xi))] d\xi = \\ = \lim_n \left[u_n(x) + \int_D G_0(x, \xi) f(u_n(\xi)) d\xi \right] = 0.$$

Функции $u_n(x)$ сходятся всюду к $u_*(x)$, а для интеграла имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_D G_0(x, \xi) f\left(\xi, u_n(\xi), \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial x_i}\right) d\xi - \right. \\ & \left. - \int_D G_0(x, \xi) f\left(\xi, u_*(\xi), \frac{\partial u_*(\xi)}{\partial x_i}\right) d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_D G_0(x, \xi) \left| f_n(u_n(\xi) - u_*(\xi)) + \right. \\ & \left. + |f_{u_{x_i}}| \left| \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_*(\xi)}{\partial x_i} \right| \right| d\xi \leq k_{10} \|u_n - u_*\|_{W_2^1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

То есть доказана формула

$$u_*(x) = - \int_D G_0(x, \xi) f\left(\xi, u_*(\xi), \frac{\partial u_*(\xi)}{\partial x_i}\right) d\xi.$$

Из нее следует, что $u_*(x) \in C^{(1, \alpha)}(D)$ для произвольного α из интервала $(0, 1)$, а затем на основании этого заключаем, что $f(u_*(\xi))$ принадлежит $C^{(2, \alpha')}(D)$. Следовательно, $u_*(x)$ дважды дифференцируема, то есть она является классическим решением задачи (1.1). Из непрерывности $u_*(x)$ и монотонности последовательности $\{u_n(x)\}$ следует, что $u_n(x)$ сходится к $u_*(x)$ равномерно.

В силу единственности решения предел верхних функций $v^*(x)$ должен совпадать с $u_*(x)$. Таким образом, доказана

Теорема. Пусть функция $f(x, u, u_{x_i})$ удовлетворяет условию гельдеровской непрерывности по x с показателем α' ($0 < \alpha' < 1$) в области $x \in D$, $u^2 + \text{grad}^2 u < \infty$ и имеет непрерывные производные $f_u, f_{u_{x_i}}$ в этой области, удовлетворяющие условиям (3.1).

Тогда задача (1.1) в m -мерной ограниченной области D с достаточно гладкой границей Γ имеет единственное решение из класса $C^{(2, \alpha')}(D)$, к которому сходятся по норме пространства $W_2^1(D)$ чеплыгинские приближения, построенные по формулам (3.2), причем сходимость самих приближений — равномерна.

Заметим, что случай $m = 2$ не вводит новых моментов в доказательство теоремы. Рассуждения также не осложняются принципиально, если в уравнении заменить оператор Δ более общим линейным эллиптическим оператором с коэффициентами, подчиненными определенным условиям гладкости. Случай $m = 1$ решен в заметке [8].

Автор искренне благодарит проф. Е. М. Ландиса и С. Н. Кружкова за оказанную ими помощь при выполнении этой работы.

Կ. Վ. ԿԵՆՉՈՅԱՆ

ՔՎԱԶԻԳՐԱԶԻՆ ԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՎԱՍՏԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՀԱՄԱՐ ԳԻՐԻՆԵՐԻ
ԽՆԴԻՆ ԿԱՍՏԱՄԵ ԶԱՊԼԻԳԻՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հաղաթում քննարկվում է Չապլիգինի մոտավոր մեթոդի կիրառումը հե-
տևյալ խնդրի նկատմամբ:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u + f(x, u, u_{x_i}) &= 0 \\ u|_{\Gamma} &= 0: \end{aligned} \right\}$$

Այստեղ համապատասխանում են m -չափանի էվկլիդեսյան տարածություն
որն է սահմանափակ D տիրույթում, որի բազան հանաչափ ողորկ Γ -կորագծի
վրա տեղի ունի նշված կորային պայմանը: Յուրյ է տրվում, որ f -ֆունկ-
ցիան որոշ սահմանափակումների ենթարկելու դեպքում կարելի է չապլի-
գինյան երկրորդային մոտավորումներ կառուցել, որոնք զուգամիտում են
խնդրի միակ լուծմանը: Վերջինիս գոյությունը դրանով ապացուցվում է:
Բերված է ալգորիթմի մոտավորությունների ստանալու մի ալգորիթմ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Nagumo M. On principally linear elliptic differential equations of the second order. Osaka Math. J., 6 (2), 1954.
2. Sato T. Sur l'équation aux dérivées partielles $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$. Compositio Math., 12, № 2, 1954.
3. Кошелев А. И. О сходимости метода последовательных приближений для квазилинейных эллиптических уравнений. ДАН СССР, 142, № 5, 1962.
4. Кошелев А. И. Инволюционные преобразования и метод последовательных приближений для эллиптических уравнений. ДАН СССР, 148, № 2, 1963.
5. Мысковских И. П. Применение метода Чаплыгина к решению задачи Дирихле для одного частного типа эллиптических дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 99, № 1, 1954.
6. Мирлида К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, М., 1957.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 5. Физматгиз, 1959.
8. Гендзоян Г. В. О двусторонних чаплыгинских приближениях решения двухточечной граничной задачи. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.