

А. А. БАБЛОЯН, О. О. ПИРУМЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ  
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВАЛА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Задача о крутильных колебаниях полуплоскости была впервые решена Сагоци [1]. Позднее эту задачу более рациональным методом решил Я. С. Уфлянд [2]. К вопросу о крутильных колебаниях полуплоскости и бесконечного слоя относятся работы Арнольда, Бикрофта, Варбуртона [3], Бикрофта [4] и других.

Крутильные колебания круглого цилиндра, один торец которого закреплен, а на другом торце действует периодическая касательная сила при свободной боковой поверхности, рассматривались в работе Сенгупта [5] и Митра [6]. В работе Митра рассмотрены также крутильные колебания вала при закрепленных торцах, когда периодическая крутящая нагрузка задана на боковой поверхности.

Настоящая работа посвящена вопросу о вынужденных колебаниях сплошного и полого цилиндров конечной длины.

§ 1. Задача динамического кручения вала сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \left( \nu^2 = \frac{\rho}{G} \right), \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — плотность,  $G$  — модуль сдвига.

Напряжения и перемещение через функцию перемещений  $\psi(r, z, t)$  выражаются формулами

$$v = r\dot{\psi}, \quad \tau_r = Gr \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial r}, \quad \tau_z = Gr \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Пользуясь преобразованием Лапласа [7]

$$\psi(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \varphi(r, z, p) e^{pt} dp, \quad (1.3)$$

$$\varphi(r, z, p) = \int_0^{\infty} \dot{\psi}(r, z, t) e^{-pt} dt$$

$$\begin{aligned} \psi(r, z, 0) &= \frac{1}{r} v(r, z, 0) = f_1(r, z), \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} &= \frac{1}{r} \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(r, z), \end{aligned} \quad (1.4)$$

из уравнения (1.1) для определения функции  $\varphi$  получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - c^2 \varphi = F(r, z, p), \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} F(r, z, p) &= v^2 p f_1(r, z) - v^2 f_2(r, z), \\ c^2 &= v^2 p^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Фундаментальными решениями уравнения (1.5) без правой части являются функции

$$\varphi(r, z, p) = \begin{cases} \frac{1}{r} (A \operatorname{sh} bz + B \operatorname{ch} bz) \begin{matrix} J_1(\mu r) \\ Y_1(\mu r) \end{matrix} \\ \frac{1}{r} \frac{I_1(ar)}{K_1(ar)} (C \sin \lambda z + D \cos \lambda z), \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$a = \sqrt{c^2 + \lambda^2}, \quad b = \sqrt{\mu^2 + c^2}. \quad (1.8)$$

Заметим, что функции

$$\operatorname{sh} cz, \quad \operatorname{ch} cz, \quad \frac{1}{r} \frac{I_1(cr)}{K_1(cr)} (Ez + F)$$

также являются решениями однородной части уравнения (1.5). Функцию  $\varphi(r, z, p)$  для сплошного вала ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, p) &= A \operatorname{sh} cz + B \operatorname{ch} cz + D \frac{I_1(cr)}{r} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} b_k z + B_k \operatorname{ch} b_k z) \frac{J_1(\mu_k r)}{r} + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{I_1(a_h r)}{r} (C_h \sin \lambda_h z + D_h \cos \lambda_h z) + \Phi(r, z, p), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$a_k = \sqrt{c^2 + \lambda_k^2}, \quad b_k = \sqrt{c^2 + \mu_k^2}. \quad (1.10)$$

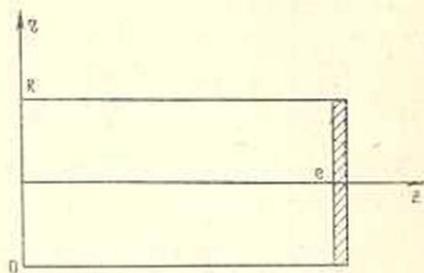
а функция  $\Phi(r, z, p)$  — частное решение неоднородного уравнения (1.5).

§ 2. Рассмотрим задачу о кручении цилиндра конечной длины со следующими граничными условиями (фиг. 1):

$$\begin{aligned}\tau_r(R, z, t) &= GR\chi_1(z, t), \\ \tau_z(r, 0, t) &= Gr\chi_2(r, t), \\ v(r, l, t) &= r\chi_3(r, t).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Для функции  $\varphi(r, z, p)$ , ввиду (1.2), (1.3) и (2.1), граничные условия получаются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(R, z, p) &= \int_0^{\infty} \chi_1(z, t) e^{-pt} dt \equiv \\ &\equiv \bar{\chi}_1(z, p), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, 0, p) &= \int_0^{\infty} \chi_2(r, t) e^{-pt} dt \equiv \\ &\equiv \bar{\chi}_2(r, p),\end{aligned}\quad (2.2)$$



Фиг. 1.

$$\varphi(r, l, p) = \int_0^{\infty} \chi_3(r, t) e^{-pt} dt \equiv \bar{\chi}_3(r, p).$$

Функцию  $\varphi(r, z, p)$  ищем в виде (1.9). Принимая  $D = C_k = 0$  и удовлетворяя граничным условиям (2.2), для определения неизвестных коэффициентов  $A_k, B_k, D_k, A, B$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{D_k a_k}{R} I_1(a_k R) \frac{l}{2} &= \int_0^l \left[ \bar{\chi}_1(z, p) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] \cos \lambda_k z dz, \\ A_k b_k \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_k R) &= \int_0^R \left[ \bar{\chi}_2(r, p) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] r^2 J_1(\mu_k r) dr, \\ Ac \frac{R^4}{4} &= \int_0^R \left[ \bar{\chi}_2(r, p) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] r^3 dr,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$(A_k \operatorname{sh} b_k l + B_k \operatorname{ch} b_k l) \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_k R) = \int_0^R [\bar{\chi}_3(r, p) - \Phi(r, l)] r^2 J_1(\mu_k r) dr,$$

$$(A \operatorname{sh} cl + B \operatorname{ch} cl) \frac{R^4}{4} = \int_0^R [\bar{\chi}_3(r, p) - \Phi(r, l)] r^3 dr,$$

где

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l},$$

а  $\mu_k$  — положительные корни функции  $J_2(xR)$ .

Рассмотрим случай, когда вал свободен от нагрузки, а на торце  $z = l$  перемещение задано по закону

$$\psi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При этом имеем

$$\bar{\chi}_1(z, p) = 0, \quad \bar{\chi}_2(r, p) = 0, \quad \bar{\chi}_3(r, p) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{p^3}. \quad (2.4)$$

Полагая, что в начальный момент вал находился в состоянии покоя, то есть

$$f_1(r, z) = f_2(r, z) = 0 \quad \text{или} \quad F(r, z, p) = \Phi(r, z, p) = 0, \quad (2.5)$$

из (2.3), (2.4), (2.5) для коэффициентов получим

$$A = A_k = B_k = D_k = 0, \quad B = \frac{\varepsilon}{p^3 \operatorname{ch} cl}. \quad (2.6)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (1.9), для функции  $\varphi$  получим

$$\varphi(r, z, p) = \frac{\varepsilon}{p^3} \frac{\operatorname{ch} \gamma pz}{\operatorname{ch} \gamma pl}, \quad (2.7)$$

а в силу (1.3) для функции  $\psi(r, z, t)$  получается следующее выражение

$$\psi(r, z, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\operatorname{ch} \gamma pz}{p^3 \operatorname{ch} \gamma pl} e^{pt} dp \quad (\gamma > 0). \quad (2.8)$$

Легко доказать, что функция  $\psi(r, z, t)$  удовлетворяет всем граничным и начальным условиям рассматриваемой задачи.

Вычисляя интеграл (2.8) с помощью вычетов, функцию  $\psi(r, z, t)$  можно представить в виде бесконечного ряда

$$\psi(r, z, t) = \frac{\varepsilon}{2} [t^2 - \gamma^2 (t^2 - z^2)] + \frac{2\varepsilon\gamma^2}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k (l-z) \cos \frac{\lambda_k}{\gamma} t}{\lambda_k^3}. \quad (2.9)$$

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда на торце  $z = l$  угловая скорость задана по закону

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = V(1 - e^{-t}).$$

Тогда для  $\bar{\chi}_3(p)$  будем иметь

$$\bar{\chi}_3(p) = V \int_0^{\infty} \left[ t - \frac{1 - e^{-t}}{p} \right] e^{-pt} dt = \frac{V\varepsilon}{p^2(\varepsilon + p)}. \quad (2.10)$$

Поступая таким же образом, как и в предыдущем примере, для функции  $\psi(r, z, t)$  получим

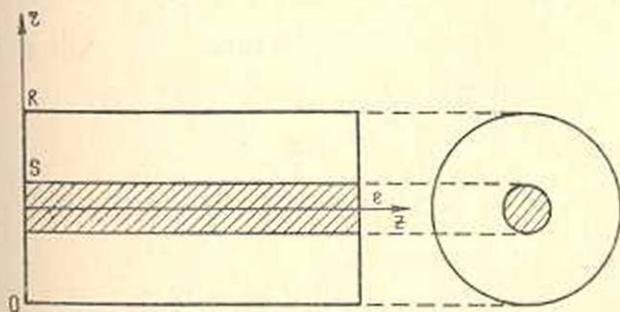
$$\psi(r, z, t) = \frac{V\varepsilon}{2\pi i} \int_{\gamma-l\infty}^{\gamma+l\infty} \frac{\operatorname{ch} \nu p z}{p^2 (\varepsilon + p) \operatorname{ch} \nu p l} e^{pt} dp, \quad (2.11)$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) = & V \left[ t - \frac{1 - e^{-t}}{\varepsilon} - \frac{e^{-t}}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \nu \varepsilon z}{\operatorname{ch} \nu \varepsilon l} \right) \right] + \\ & + \frac{2V\varepsilon^2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k z}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k l} \frac{\lambda_k \cos \frac{\lambda_k}{\nu} t - \nu \varepsilon \sin \frac{\lambda_k}{\nu} t}{\nu^2 \varepsilon^2 + \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

§ 3. Рассмотрим теперь задачу динамического кручения полого вала (фиг. 2) конечной длины  $l$ , когда на цилиндрической поверхности  $r=s$  заданы перемещения, а на остальных частях поверхности известны напряжения, то есть граничные условия заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_r(R, z, t) &= GR\chi_1(z, t), \\ \varphi(s, z, t) &= s\chi_2(z, t), \\ \tau_z(r, 0, t) &= rG\chi_3(r, t), \\ \tau_z(r, l, t) &= rG\chi_4(r, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 2.

Эти условия через функцию  $\varphi$  примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(R, z, p) &= \int_0^{\infty} \chi_1(z, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_1(z, p), \\ \varphi(s, z, p) &= \int_0^{\infty} \chi_2(z, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_2(z, p), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, 0, p) &= \int_0^{\infty} \chi_3(r, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_3(r, p), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, l, p) = \int_0^{\infty} \gamma_4(r, t) e^{-pt} dt = \bar{\gamma}_4(r, p).$$

Функцию  $\varphi$  ищем в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини [8]

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, p) = & A \operatorname{sh} cz + B \operatorname{ch} cz + C \frac{I_1(cr)}{r} + D \frac{K_1(cr)}{r} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} b_k z + B_k \operatorname{ch} b_k z) \frac{W_1(\mu_k r)}{r} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ C_k \frac{I_1(a_k r)}{r} + D_k \frac{K_1(a_k r)}{r} \right] \cos \lambda_k z + \Phi(r, z, p). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$a_k = \sqrt{c^2 + \lambda_k^2}, \quad b_k = \sqrt{c^2 + \mu_k^2}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad (3)$$

$\Phi(r, z, p)$  — частное решение неоднородного уравнения (1.5), а функции  $W_n(\mu_k r)$  имеют вид

$$W_n(\mu_k r) = \frac{J_n(\mu_k r)}{J_1(\mu_k s)} - \frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_1(\mu_k s)} = \frac{J_n(\mu_k r) Y_1(\mu_k s) - Y_n(\mu_k r) J_1(\mu_k s)}{J_1(\mu_k s) Y_1(\mu_k s)}, \quad (3)$$

где  $\mu_k$  — положительные корни уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{W_2(\mu_k r)}{r} \right]_{r=R} = \frac{W_2(\mu_k R)}{R^2} = 0$$

или

$$J_2(\mu_k R) Y_1(\mu_k s) - Y_2(\mu_k R) J_1(\mu_k s) = 0. \quad (3)$$

Легко показать, что системы функций  $\{W_1(\mu_k r)\}$  и  $\{W_2(\mu_k r)\}$  ортогональны в промежутке  $[s, R]$  с весом  $r$ .

Удовлетворяя граничным условиям (3.2), для определения неизвестных получим

$$\begin{aligned} & \frac{Cc}{R} I_2(cR) - \frac{Dc}{R} K_2(cR) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{C_k a_k}{R} I_2(a_k R) - \frac{D_k a_k}{R} K_2(a_k R) \right] \cos \lambda_k z = \bar{\gamma}_1(z, p) - \Phi_r'(R, z) \\ & A \operatorname{sh} cz + B \operatorname{ch} cz + \frac{C}{s} I_1(cs) + \frac{D}{s} K_1(cs) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{C_k}{s} I_1(a_k s) + \frac{D_k}{s} K_1(a_k s) \right] \cos \lambda_k z = \bar{\gamma}_2(z, p) - \Phi(s, z), \end{aligned} \quad (3)$$

$$cA + \sum_{k=1}^{\infty} b_k A_k \frac{W_1(\mu_k r)}{r} = \bar{\chi}_3(r, p) - \Phi_2'(r, 0),$$

$$cA \operatorname{ch} cl + cB \operatorname{sh} cl +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [b_k A_k \operatorname{ch} b_k l + b_k B_k \operatorname{sh} b_k l] \frac{W_3(\mu_k r)}{r} = \bar{\chi}_4(r, p) - \Phi_2'(r, l).$$

Неизвестные коэффициенты, входящие в выражение (3.3), в общем случае можно определить из соотношений (3.7). Для простоты предположим, что вал свободен от внешней нагрузки, а на цилиндрической поверхности  $r = s$  задано перемещение по закону

$$\psi = \frac{v}{s} = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (3.8)$$

то есть граничные условия имеют вид

$$\bar{\chi}_1 = \bar{\chi}_2 = \bar{\chi}_3 = 0, \quad \bar{\chi}_4(p) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{p^3}. \quad (3.9)$$

Если предположить, что в начальный момент  $t = 0$  вал находится в покое, то есть

$$f_1(r, z) = f_2(r, z) = F(r, z, p) = 0, \quad \Phi(r, z, p) = 0, \quad (3.10)$$

то из системы (3.7) получим

$$A = B = A_k = B_k = C_k = D_k = 0,$$

$$CI_2(cR) - DK_2(cR) = 0, \quad (3.11)$$

$$CI_1(cs) + DK_1(cs) = \frac{s\varepsilon}{p^3},$$

откуда, определяя  $C$  и  $D$  и подставляя их значения в (3.3), получим

$$\varphi = \frac{s\varepsilon}{p^3 r} \frac{I_1(cr) K_2(cR) + K_1(cr) I_2(cR)}{I_1(cs) K_2(cR) + K_1(cs) I_2(cR)}, \quad (3.12)$$

следовательно,

$$\psi = \frac{s\varepsilon}{2\pi r i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p^3} \frac{I_1(cr) K_2(cR) + K_1(cr) I_2(cR)}{I_1(cs) K_2(cR) + K_1(cs) I_2(cR)} e^{pt} dp. \quad (3.13)$$

Вычислим этот интеграл с помощью вычетов. Из соотношения

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad K_n(x) = \frac{\pi i^{n+1}}{2} [J_n(ix) + i Y_n(ix)] \quad (3.14)$$

получим, что

$$I_1(cs) K_2(cR) + K_1(cs) I_2(cR) = J_2(icR) Y_1(ics) - J_1(ics) Y_2(icR). \quad (3.15)$$

Учитывая (3.6) и формулу

$$Y_n(-x) = (-1)^n [Y_n(x) + i\pi J_n(x)],$$

для корней выражения (3.15) получим

$$p_k = \pm \frac{i\mu_k}{v} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поэтому интеграл (3.13) окончательно можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi = 2\varepsilon v^2 & \left\{ \frac{1}{16} \left[ \frac{4t^2}{v^2} + \frac{(R^2 - r^2)^2}{r^2} - \frac{(R^2 - s^2)^2}{s^2} \right] - \right. \\ & - \frac{s}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[J_2(\mu_k R) Y_1(\mu_k r) - J_1(\mu_k r) Y_2(\mu_k R)] \cos \frac{\mu_k}{v} t}{\mu_k^3 [R [J_1(\mu_k R) Y_1(\mu_k s) - Y_1(\mu_k R) J_1(\mu_k s)] +} \\ & \left. \rightarrow \dots + s [Y_2(\mu_k R) J_2(\mu_k s) - J_2(\mu_k R) Y_2(\mu_k s)] \right\}. \end{aligned}$$

Как видно из выражения (3.18), частота колебания зависит от  $v$ . Что же касается ускорения вращательного движения  $\varepsilon$ , то оно влияет лишь на амплитуду колебания.

Для численного примера рассмотрим случай, когда  $\frac{R}{s} = 5$ .

Вычисляя по формулам (3.18) и (1.2) и ограничиваясь первыми членами ряда, для относительного перемещения  $V = v - \frac{\varepsilon t^2}{2}$

в точках радиуса вала  $\rho = \frac{r}{s} = 1, 2, 3, 4, 5$  ( $= R$ )

получим следующие выражения:

$$V = -4\varepsilon v^2 s^3 \left[ A_p + \sum_{k=1}^5 c_{kp} \cos \alpha_k T \right],$$

$$\tau_r = -4\varepsilon v^2 s^2 G \left[ A_p^* + \sum_{k=1}^5 c_{kp}^* \cos \alpha_k T \right],$$

где  $T$  и  $\alpha_k$  — безразмерные величины и имеют вид

$$T = \frac{t}{sv}, \quad \alpha_k = \mu_k s.$$

Значения коэффициентов  $A_p, A_p^*, c_{kp}, c_{kp}^*$  приведены в табл.

$\epsilon_{kp}$ 

$k \backslash p$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	-68.104	-0.093	-0.022	-0.004	+0.001
3	-102.608	-0.072	+0.011	+0.005	-0.002
4	-142.750	+0.012	+0.008	-0.006	+0.002
5	-180.053	+0.064	-0.014	+0.005	-0.002

Таблица 1

$p \backslash k$	
1	0
2	58.219
3	102.667
4	142.734
5	180.000

 $\epsilon_{kp}^*$ 

$k \backslash p$	1	2	3	4	5
1	-38.826	-0.078	-0.030	-0.016	-0.010
2	-9.552	+0.007	+0.015	+0.012	+0.006
3	-3.827	+0.046	+0.011	-0.007	-0.004
4	-1.470	+0.040	-0.015	+0.003	+0.002
5	0	0	0	0	0

Таблица 2

$p \backslash k$	
1	39.000
2	9.516
3	3.778
4	1.441
5	0

Значения касательных напряжений  $\tau_r$  и относительных перемещений  $V$  в различные моменты времени для некоторых точек радиуса приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

 $-V/2\tau_0^2 S^2$ 

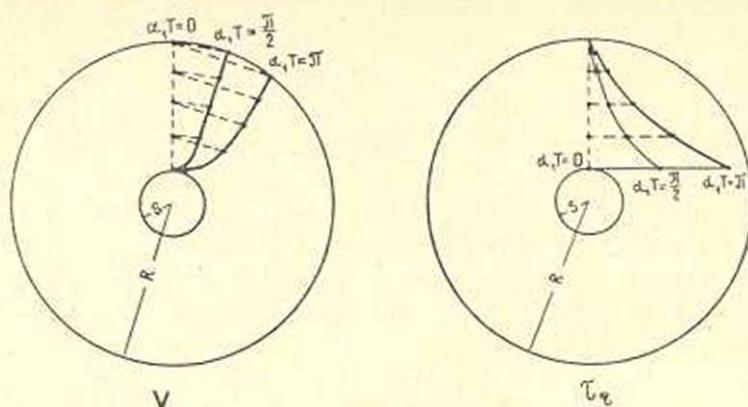
	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	58.29	102.74	142.73	179.93
$\pi$	0	116.25	205.22	285.50	360.09
$\frac{3\pi}{2}$	0	58.28	102.70	142.73	179.97
$2\pi$	0	0.11	0.04	-0.03	-0.02
$\frac{5\pi}{2}$	0	58.22	102.65	142.73	180.02
$3\pi$	0	116.38	205.30	285.48	360.03
$\frac{7\pi}{2}$	0	58.15	102.61	142.75	180.04
$4\pi$	0	0.18	0.14	-0.03	-0.12

Таблица 4

 $-\tau_r/4\tau_0^2 S^2 G$ 

	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	39.06	9.52	3.75	1.39	0
$\pi$	77.77	19.07	7.65	2.94	0
$\frac{3\pi}{2}$	39.06	9.50	3.75	1.43	0
$2\pi$	-0.18	-0.04	-0.06	0.01	0
$\frac{5\pi}{2}$	39.00	9.51	3.77	1.46	0
$3\pi$	77.90	19.04	7.59	2.89	0
$\frac{7\pi}{2}$	38.94	9.52	3.82	1.47	0
$4\pi$	0.22	-0.02	-0.09	-0.08	0

Для наглядности построены эиоры (фиг. 3).



Фиг. 3.

Как видно из этих результатов, при равноускоренном вращении радиусы вала всегда отстают от первоначального положения и колеблются относительно некоторого среднего положения с частотой  $\alpha_1/2\pi\gamma$ . Кроме этого, точки, лежащие на линии в радиальном направлении, колеблются также и с другими частотами, но гораздо меньшими амплитудами, чем амплитуды основной частоты, так что на общую картину колебания влияние последних незначительно.

Аналогичное колебание имеет место и для касательного напряжения  $\tau_r$ .

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 25 VI. 1964

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Օ. Օ. ՓԻՐՈՒՄՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԳԱՆԱԶԵՎ ԼԻՆԵՐԻ ԳԻՆԱՄԻՆ  
ՈՒՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Հողվածում դիտարկվում են վերջավոր երկարությամբ գլանաձև լիսեղի վերարերվալ զինամիկ ոլորման մի քանի խնդիրներ՝ խառը եզրային պայմաններով: Լապլասի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրները բերվում են  $\varphi(r, z, p)$  ֆունկցիայի գանելուն, իսկ վերջինս որոնվում է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Իենիի շարքերի գումարի տեսքով: Շարքերի գործակիցները որոշվում են եզրային պայմաններից վերջավոր տեսքով: Դիտարկված են մի քանի օրինակներ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space II. J. Appl. Phys., 15, № 9, 1944.
2. Уфлянд Я. С. О крутильных колебаниях полупространства. ПИММ, 25, вып. 1, 1961.

3. *Arnold R. N., Bycroft G. N., Warburton G. B.* Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid. *J. Appl. Mech.*, **22**, № 3, 1955.
4. *Bycroft G. N.* Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. *Philosoph. trans., series A*, **248**, 1956.
5. *Sengupta A. M.* Note on a simple case of forced torsional oscillation of a circular cylinder. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **41**, № 1, 1949, 47—48.
6. *Mitra A. K.* Note on the forced torsional vibration of a cylinder having periodic shearing forces along a ring on the curved surface. *Indian Journ. Theor. Phys.*, **7**, № 1, 1959, 1—4.
7. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
8. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.