

Ю. М. АИВАЗЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМЫ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В настоящей работе рассматривается возбуждение системы полубесконечных плоских волноводов при вылете из одного из них линейного источника, то есть заряженной или токовой нити. Также рассматривается излучение в волновой зоне и предельный переход, когда расстояние между пластинами стремится к нулю. Отметим, что задачи дифракции электромагнитных волн на такой системе были рассмотрены в [1, 2], а в работах [3] рассматривалось возбуждение системы полубесконечных плоскостей, когда линейные источники пролетают мимо них.

Пусть линейный источник, параллельный оси z , вылетает с постоянной скоростью v по оси x из одного из полубесконечных волноводов. Система идеально проводящих полуплоскостей описывается уравнениями $y = (2n + 1)b$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x < 0$, $-\infty < z < \infty$. Расстояние между двумя соседними полуплоскостями равно $2b$. Для начала рассмотрим равномерно заряженную нить с линейной плотностью заряда ρ . В этом случае отличны от нуля компоненты полей E_x , E_y и H_z . В данном случае удобно искать $E_x = E$, которое в силу граничных условий должно быть равно нулю на полуплоскостях. Остальные компоненты полей находятся из E_x . Рассмотрим область $(2n - 1)b < y < (2n + 1)b$, то есть область n -го волновода и его продолжения. Поле в этой области обозначим через $E_n(x, \xi)$, где $\xi = y - 2nb$, $|\xi| < b$. Представим $E_n(x, \xi)$ в виде интеграла

$$E_n(x, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} E_{n,p}(x, \xi) d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} E_p(x, \xi) e^{i\mu n} d\mu. \quad (1)$$

Из этого разложения вытекает, что

$$E_{n+1,p}(x, \xi) = E_{n,p}(x, \xi) e^{i\mu}. \quad (2)$$

Будем искать $E_{n,p}$ в виде $E_{n,p} = \tilde{E}_{n,p} + E_{n,p}^0$, где

$$E_{n,p}^0(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} E^0(x, \xi) e^{i\mu n}, \quad (3)$$

а $E^0(x, \xi)$ есть поле движущейся заряженной нити в бесконечном волноводе $-b < \xi = y < b$, $-\infty < x, z < \infty$. Для $E^0(x, \xi)$ легко получить следующее выражение

$$E^0(x, \xi) = \int E^0_\omega(x, \xi) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где

$$E^0_\omega(x, \xi) = -\frac{i\rho\omega\gamma}{kc^2} e^{i\frac{\rho\omega}{v}x} \left[e^{-k\gamma|\xi|} - \frac{chk\gamma\xi}{chk\gamma b} e^{-k\gamma b} \right]. \quad (4)$$

$$k = \frac{|\omega|}{c}, \quad \gamma^2 = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

$\tilde{E}_{n,\mu}(x, \xi)$ будем искать в виде

$$\tilde{E}_{n,\mu}(x, \xi) = \int \tilde{E}_{n,\mu\omega}(a, \xi) e^{-i\alpha x - i\omega t} d\alpha d\omega. \quad (5)$$

Введем обозначение $\tilde{E}_{n,\mu\omega}(a, \xi) \equiv \varphi_n(a, \xi)$. Так как $\tilde{E}_{n,\mu}(x, \xi)$ должно удовлетворять однородному уравнению Даламбера, то $\varphi_n(a, \xi)$ имеет следующий вид

$$\varphi_n(a, \xi) = A_n e^{\lambda \xi} + B_n e^{-\lambda \xi}, \quad (6)$$

где A_n и B_n функции от a , $\lambda^2 = a^2 - k^2$, $\text{Im} k = \delta > 0$. Из условия непрерывности $E_n(x, b) = E_{n+1}(x, -b)$ с учетом того, что $E^0(x, \pm b) = 0$ и (2) получим

$$B_n = CA_n, \quad C = \frac{e^{-\lambda b + i\mu b} - e^{\lambda b}}{e^{-\lambda b} - e^{\lambda b + i\mu b}}. \quad (7)$$

Введем теперь обозначения

$$\varphi_n^\pm(a, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{E}_{n,\mu\omega}(\pm a, \xi) e^{\pm i\alpha x} d\alpha, \quad (8)$$

тогда

$$\varphi_n(a, \xi) = \varphi_n^+(a, \xi) + \varphi_n^-(a, \xi). \quad (9)$$

При $(2n-1)b < y < (2n+1)b$, следовательно, имеем

$$\varphi_n^+(\xi) + \varphi_n^-(\xi) = A_n (e^{\lambda \xi} + C e^{-\lambda \xi}), \quad (10)$$

здесь мы вместо $\varphi_n^\pm(a, \xi)$ написали просто $\varphi_n^\pm(\xi)$ для удобства. Введем теперь обозначение $\varphi_n(\xi) = \int \varphi_n(\xi) d\xi$, тогда

$$\varphi_n^+(\xi) + \varphi_n^-(\xi) = \frac{A_n}{\lambda} (e^{\lambda \xi} - C e^{-\lambda \xi}) \quad (11)$$

при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$ и, аналогично, при $(2n+1)b < y < (2n+3)b$

$$\varphi_{n+1}^{+}(\xi) + \varphi_{n+1}^{-}(\xi) = \frac{A_n e^{i\mu}}{\lambda} (e^{i\xi} - C e^{-i\xi}). \quad (12)$$

Напишем теперь соотношения (10)–(12) при $y = (2n+1)b$, то есть на n -ой пластине и ее продолжении и учтем, что в силу граничных условий $\varphi_n^{-}(b) = 0$

$$\varphi_n^{+}(b) = A_n (e^{i\lambda b} + C e^{-i\lambda b}), \quad (13)$$

$$\varphi_n^{+}(b) + \varphi_n^{-}(b) = \frac{A_n}{\lambda} (e^{i\lambda b} - C e^{-i\lambda b}), \quad (14)$$

$$\varphi_{n+1}^{+}(-b) + \varphi_{n+1}^{-}(-b) = \frac{A_n e^{i\mu}}{\lambda} (e^{-i\lambda b} - C e^{i\lambda b}). \quad (15)$$

Обозначим

$$\varphi_{n+1}^{+}(-b) - \varphi_n^{+}(b) = S^{\pm}. \quad (16)$$

Здесь функция $S^{\pm}$ неизвестная. Она голоморфна в нижней полуплоскости комплексного переменного α . $S^{\pm}$ можно легко определить из условий непрерывности интеграла полного поля. Из этого условия получаем

$$S^{\pm} = -\frac{Q}{\alpha + \frac{w}{v}}, \quad \text{где } Q = \frac{\rho}{4\pi^2 w} \frac{e^{i\mu n} (1 + e^{i\mu})}{ch k \gamma b}. \quad (17)$$

Вычитая (15) из (14) и учитывая (16), (17) и (7), получим уравнение

$$S^{\pm} + \frac{Q}{\alpha + \frac{w}{v}} = -\frac{1}{b} \frac{K(\mu, \alpha)}{\lambda^2} \varphi_n^{+}(b), \quad (18)$$

где

$$K(\mu, \alpha) = \frac{2\lambda b (\ch 2\lambda b - \cos \mu)}{\sh 2\lambda b}.$$

Уравнение (18) типа Винера-Хопфа. Для его решения необходимо факторизовать функцию $K(\mu, \alpha)$, то есть представить её в виде $K(\mu, \alpha) = K_{+}(\mu, \alpha) K_{-}(\mu, \alpha)$, где K_{+} и K_{-} соответственно голоморфны в нижней и верхней полуплоскостях комплексного переменного α . Как нетрудно убедиться K_{+} и K_{-} имеют следующий вид:

$$K_{\pm}(\mu, \alpha) = (1 - \cos \mu)^{1/2} e^{\pm i \frac{2b\alpha}{\pi} \ln 2} \left[\left(1 - \frac{4b^2 k^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \mp \frac{2b\alpha}{|\mu|} \right] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{4b^2 k^2}{\lambda_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\lambda_j} \right] \left[\left(1 - \frac{4b^2 k^2}{\gamma_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\gamma_j} \right]}{\left[\left(1 - \frac{4k^2 b^2}{(\pi j)^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\pi j} \right]}, \quad (19)$$

где $\lambda_j = 2\pi j + \mu$, $\gamma_j = 2\pi j - \mu$, $\lambda_0 = |\mu|$.

Решение уравнения (18) имеет следующий вид:

$$\varphi_n^+(b) = \frac{b(x+k) \left(k + \frac{\omega}{v} \right) Q}{\left(x + \frac{\omega}{v} \right) K_-\left(\mu, -\frac{\omega}{v} \right) K_+(\mu, x)} \quad (20)$$

Коэффициенты A_n и B_n выражаются через $\varphi_n^+(b)$ следующим образом:

$$A_n = \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda b} (e^{2\lambda b} - e^{-i\mu})}{\operatorname{sh} 2\lambda b} \varphi_n^+(b), \quad B_n = -\frac{1}{2} \frac{e^{\lambda b} (e^{-2\lambda b} - e^{-i\mu})}{\operatorname{sh} 2\lambda b} \varphi_n^+(b), \quad (21)$$

Теперь, учитывая (1), (5), (6), а также то, что функции $K_{\pm}(\mu, x)$ согласно их определению (19), — четные по μ , получим при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{x,\omega}(x, y) &= \frac{cb}{4\pi^2\omega} \frac{k + \frac{\omega}{v}}{\operatorname{ch} k\gamma b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha + k}{\alpha + \frac{\omega}{v}} d\alpha \times \\ &\times \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\xi_n(\lambda) e^{\lambda(y-2nb)} + \xi_{-n}(\lambda) e^{-\lambda(y-2nb)}}{K_-\left(\mu, -\frac{\omega}{v} \right) K_+(\mu, x) \operatorname{sh} 2\lambda b} d\mu, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\xi_n(\lambda) = [\cos \mu n + \cos \mu(n+1)] e^{\lambda b} - [\cos \mu n + \cos \mu(n-1)] e^{-\lambda b}$.

Отметим, что при $n \neq 0$ $\tilde{E}_{x,\omega}$, очевидно, есть Фурье-компонента полного поля E_x . При $n=0$ для получения полного поля к $\tilde{E}_{x,\omega}$ необходимо добавить $E_{x,0}^0$ из (4). Рассмотрим поле $E_{x,\omega}$ внутри n -го волновода, то есть при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$, $x < 0$. Нетрудно убедиться, что подынтегральное выражение в (22) не имеет точки ветвления в верхней полуплоскости комплексного переменного α . Поэтому интегрирование по α в (22) в этом случае сведется к вычислению вычетов подынтегрального выражения. Эти вычеты дают собственные волноводные волны

$$\tilde{E}_{x,\omega}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ P_{nm} \cos \left[\frac{\pi(2m-1)}{2b} (y-2nb) \right] e^{-i\alpha_{2m-1}x} + \right.$$

$$+ Q_{nm} \sin \frac{m\pi}{b} (y - 2nb) e^{-i\alpha_{2m}x}, \quad (23)$$

$$Q_{nm} = \frac{\rho m (-1)^{m+1}}{\omega l b \alpha_{2m}} \frac{(\alpha_{2m} + k) \left(k + \frac{\omega}{v}\right)}{\left(\alpha_{2m} + \frac{\omega}{v}\right) \operatorname{ch} k_1 b} \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{\sin \mu n \sin \mu}{K_- \left(\mu, -\frac{\omega}{v}\right) K_+(\mu, \alpha_{2m})} d\mu,$$

$$P_{nm} = \frac{\rho (2m-1) (-1)^{m+1}}{\omega l b \alpha_{2m-1}} \frac{(\alpha_{2m-1} + k) \left(k + \frac{\omega}{v}\right)}{\left(\alpha_{2m-1} + \frac{\omega}{v}\right) \operatorname{ch} k_1 b} \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{\cos \mu n (1 + \cos \mu)}{K_- \left(\mu, -\frac{\omega}{v}\right) K_+(\mu, \alpha_{2m-1})} d\mu, \quad (24)$$

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{2b}\right)^2}.$$

Оценка интегралов (24) производится точно также, как в [1]. Для оценки запишем

$$P_{nm} = \int_0^\pi \cos \mu n \psi'_m(\mu) d\mu, \quad Q_{nm} = \int_0^\pi \sin \mu n \xi_m(\mu) d\mu;$$

интегрируя два раза по частям и учитывая, что $\xi_n(0) = \xi_n(\pi) = 0$, получим

$$P_{nm} = [(-1)^n \psi'_m(\pi) - \psi'_m(0)] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (25)$$

$$Q_{nm} = [(-1)^n \xi_m(\pi) - \xi_m(0)] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (26)$$

Формулами (25) и (26) можно пользоваться уже при $n=3$. Ошибка при этом порядка 0,01.

Перейдем теперь к вычислению поля в дальней зоне при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$, $x > 0$. Положим $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. При больших r интеграл по z в (22) можно вычислить по методу перевала. В этом случае необходимо также учитывать полюс при $z = -\frac{\omega}{v}$.

Вклад от этого полюса плюс нулевое поле задачи, которое необходимо учитывать при $n=0$, дают поле нити в пустоте. Отвлекаясь от этого, для $E_{x,0}$ при больших r получим следующее выражение для $E_{x,0}(x, y)$ при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$:

$$E_{x,0}(x, y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{pb}{i\omega} \frac{\left(k + \frac{\omega}{v}\right)(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\operatorname{ch} k\gamma b \sin(2kb \sin \theta) \left(\frac{\omega}{v} - k \cos \theta\right)} \times \\ \times \frac{e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}}{r^{1/2}} \int_0^{\pi} \frac{[\zeta_+(ik \sin \theta) - \zeta_-(-ik \sin \theta)] e^{-2ikb \sin \theta}}{K_-(\mu, -\frac{\omega}{v}) K_+(\mu, -k \cos \theta)} d\mu. \quad (27)$$

Необходимо еще вычислить интеграл по μ . Для этого предположим что $2\pi j < 2kb \sin \theta < (2j+1)\pi$. В этом случае в K_+ при $0 < \mu < \pi$ обращается в 0 член с λ_j , а при $(2j-1)\pi < 2kb \sin \theta < 2\pi j$ обращается в 0 член с λ_j^* . Рассмотрим, например, случай, когда $2\pi j < 2kb \sin \theta < (2j+1)\pi$. Введем переменную x по формуле $4b^2k^2 - \lambda_j^2 = 4b^2x^2$, тогда

$$\frac{1}{K_-(\mu, -k \cos \theta)} \sim \frac{1}{x - k \cos \theta} = P \frac{1}{x - k \cos \theta} + i\pi \delta(x - k \cos \theta).$$

При этом интегралом в смысле главного значения можно пренебречь, так как из-за больших n подынтегральное выражение в нем будет сильно осциллирующей функцией. Интеграл же от δ -функции сразу берется. Вводя также обозначения

$$\bar{K}_{\pm}(\mu, x) = \frac{K_{\pm}(\mu, x)}{\left[\left(1 - \frac{4b^2k^2}{\lambda_j^2}\right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\lambda_j}\right]}, \quad (28)$$

окончательно получим следующее выражение для поля в дальней зоне

$$E_{x,0}(x, y) = \frac{4kib^2\beta^2}{\omega} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\left(k + \frac{\omega}{v}\right)(1 - \cos \theta)}{\operatorname{ch} k\gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \times \\ \times \frac{\sin^2 \theta \cos \theta \cos(bk \sin \theta)}{\bar{K}_+(\sigma, -k \cos \theta) \bar{K}_-(\sigma, -\frac{\omega}{v})} \frac{e^{ikr - i\frac{\pi}{4}}}{r^{1/2}}, \quad (29)$$

где $\sigma = 2\pi j - 2bk \sin \theta$, при $2\pi j < 2bk \sin \theta < (2j+1)\pi$. В случае, когда $(2j-1)\pi < 2bk \sin \theta < 2\pi j$, $\sigma = 2kb \sin \theta - 2\pi j$. В этом случае в (29) появляется общий минус, а в определении $\bar{K}_{\pm}(\mu, x)$ в (28) λ_j нужно за-

менить на γ_l . Выражение (29) не зависит от n , это и понятно, так как поле в дальней зоне представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну. Остальные компоненты полей можно найти из (29) или (22) с помощью уравнений Максвелла. Приведем выражение для интенсивности излучения $I_m(\theta) = cr |H_{z,m}|^2$. Полная интенсивность излучения будет

$$I_m = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_m(\theta) d\theta, \quad (30)$$

$$I_m(\theta) = \frac{2b^4 k^4 \rho^2 \beta^2}{\pi c} \frac{(1 + \beta)^2 \sin^2 2\theta (1 - \cos \theta)^2 \cos^2 (bk \sin \theta)}{\operatorname{ch}^2 k \gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2 \left| \tilde{K}_- \left(\sigma, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}_+ \left(\sigma, -k \cos \theta \right) \right|^2}, \quad (31)$$

здесь σ зависит от величины $2kb \sin \theta$, как было указано ранее. Рассмотрим предельный случай $b \rightarrow 0$. Из (31) получим при $b \rightarrow 0$

$$I_m(\theta) = \frac{2\rho^2 \beta^2}{\pi \omega} \frac{(1 + \beta)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta (1 - \cos \theta)^2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}.$$

Это есть интенсивность переходного излучения заряженной нити, вылетающей из среды, имеющей бесконечную проводимость вдоль оси z и нулевую проводимость вдоль оси y . Естественно, что эта интенсивность отличается от переходного излучения заряженной нити, вылетающей из однородного металла.

Рассмотрим теперь случай, когда вылетает нить, по которой течет ток J . В этом случае отличны от нуля компоненты полей E_z , H_x и H_y . Будем искать E_z . Решение ищется вполне аналогично предыдущему случаю, но в (11) и (12) вместо интегрирования нужно брать производные. Это связано с тем, что около края пластин наведенные токи и заряды должны иметь следующее поведение $\rho \sim x^{-1/2}$, $i_x \sim x^{1/2}$, $j_z \sim x^{-1/2}$. Для $E_{z,m}$ получим при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{z,m}(x, y) = & -\frac{\omega J b}{4\pi^2 v c^2 \operatorname{ch} k \gamma b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i z x} dx \times \\ & \times \int_0^{\pi} \frac{\zeta_n e^{\lambda(y-2nb)} + \zeta_{-n} e^{-\lambda(y-2nb)}}{\left(\alpha + \frac{\omega}{v} \right) K_- \left(\mu, -\frac{\omega}{v} \right) K_+ \left(\mu, \alpha \right) \operatorname{sh} 2\lambda b} d\mu. \end{aligned} \quad (32)$$

Приведем выражение для $E_{z,m}$ при $r \rightarrow \infty$ в дальней зоне.

$$E_{z,\omega}(x, y) =$$

$$= -i\omega J b^2 k c \beta \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} \frac{\sin \theta \sin 2\theta \cos(bk \sin \theta) e^{ikr - i \frac{\pi}{4}}}{\operatorname{ch} k \gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \tilde{K}_- \left(z, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}_+ \left(z, -k \cos \theta \right)} \quad (33)$$

Для интенсивности излучения имеем

$$I_\omega(\theta) = cr (|E_z, \omega|)^2 = \frac{2c J^2 b^4 k^2 \beta^2}{\pi} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 2\theta \cos^2(bk \sin \theta)}{\operatorname{ch}^2 k \gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \left| \tilde{K}_- \left(z, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}_+ \left(z, -k \cos \theta \right) \right|^2} \quad (34)$$

полная интенсивность отсюда находится по формуле (30). Рассмотрим в этой формуле предельный переход $b \rightarrow 0$. Получим в этом случае

$$I_\omega(\theta) = \frac{2J^2 \beta^2 c^2}{\pi \omega} \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}.$$

Эта формула совпадает с формулой для интенсивности переходного излучения нити с током из сплошной однородной металлической среды в вакуум. Это вполне понятно, так как в данной задаче имелось только лишь поле E_z , которое направлено вдоль оси с бесконечной проводимостью.

ЦИНФТЛ АН Армянской ССР
ФИАН СССР им. П. Н. Лебедева

Поступила 29 V 1964

ՅՈՒ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿԻՆ

ԿԻՍԼՈՒՆՆԵՐԶ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻՑ ԲԱՂԿԱՅԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ԳՐԳՈՒՄԸ
ԳԾԱՅԻՆ ԱՂՅՈՒՐՆԵՐՈՎ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Աշխատության մեջ դիտարկվում է կիսաանվիրջ հարթ ալիքատարների սխեմայի զրգույր նրանցից մեկի միջից լիցքավորված կամ հոսանքատար լարի դուրս թողնու գնալքում: Որոշվում են էլեկտրամագնիսական դաշտի էլեկտրական վեկտորի տանգենցիալ կոմպոնենտների Շնորհիվ ալիքատարների սխեմայի պերիոդիկ հատուկությունների, էլեկտրամագնիսական դաշտերի «կարումը» բերվում է այդ դաշտերի «կարմանը» միայն մեկ թիվի վրա: Էլեկտրական վեկտորի տանգենցիալ կոմպոնենտների համար ստացվում են վիճակ-հոսքի տիպի ֆունկցիոնալ հավասարումներ, որոնք և լուծվում են: Դրանով են ալիքատարների սխեմայի հառադրվածան խնամակալությունը ալիքային դաշտում, ալիքատարների ներքում և նրանցից դուրս: Կատարված է սահմանային անցում, երբ թիվի գների միջև հեռավորությունը ձգտում է

արդի: Յույժ է տրված, որ հսկանալու լարի դեպքում հառադալթման
րանաձևը անցնում է հարմար անցումային հառադալթման ինտենսիվության
րանաձևին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бакланов Е. В. Излучение электромагнитных волн из системы полубесконечных пластин. ДАН СССР, 153, 1963, 570.
2. Carlson J. F., Heins A. E. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates I. Quart. Appl. Math., 4, 1946, 313. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates II. Quart. Appl. Math., 5, 1947, 82.
3. Болотовский Б. М. и Воскресенский Г. В. Поле заряженной нити, равномерно движущейся вблизи от системы идеально проводящих полуплоскостей. ДАН СССР, 156, 1964, 770. Излучение линейного источника, пролетающего вблизи дифракционной решетки, образованной системой идеально проводящих полуплоскостей. ЖТФ, 34, 1964, 1856.