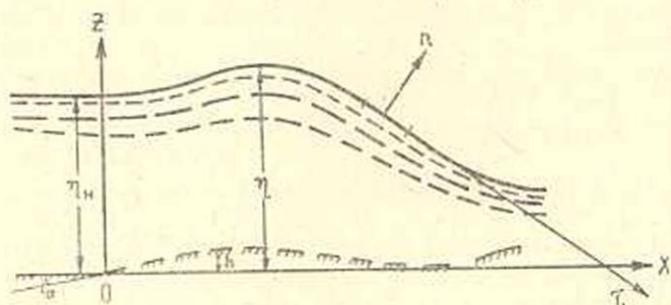


Л. Е. ДАНИЕЛЯН

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ РУСЛЕ
 С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОРИСТЫМ ДНОМ

§ 1. Рассматривается установившееся плоское ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости по открытому руслу с пористым дном, которое описывается заданной кривой ($z = h(x)$). Движение происходит под влиянием силы тяжести (фиг. 1).



Фиг. 1.

Задача приводится к интегрированию уравнений Навье—Стокса при соответствующих граничных условиях. Уравнения движения вместе с уравнением неразрывности, для данной задачи, будут иметь следующий вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где u и w — компоненты скорости по осям ox и oz , p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести, α — угол наклона дна к горизонту.

Из условия прилипания имеем

$$u = 0 \quad \text{при } z = h,$$

$$w = -kp \quad \text{при } z = h,$$

где k — коэффициент пористости дна.

Допустим, уравнение свободной поверхности выражается функцией $z = \eta(x)$. Тогда на свободной поверхности для вектора скорости и вектора напряжения получим следующие граничные условия [1]:

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\frac{p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta.$$
(1.3)

Примем также, что в начальном сечении глубина является постоянной величиной

$$\eta = \eta_0 \quad \text{при } x = 0. \quad (1.4)$$

Определим законы изменения скорости и давления, а также вид свободной поверхности.

§ 2. Для решения задачи необходимо проинтегрировать систему квазилинейных уравнений (1.1) с частными производными при вышеуказанных граничных условиях.

Задача решается методом малого параметра. В качестве малого параметра σ принято отношение характерной глубины к характерной длине ($\sigma = \frac{H}{L}$). Чтобы ввести малый параметр σ в систему уравнений и в граничные условия, приведем их к безразмерному виду [2]. При этом система уравнений и граничные условия примут следующий вид:

$$\sigma \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma^2 \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\sigma^2 \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$u = 0 \quad \text{при } z = h,$$

$$w = -kp \quad \text{при } z = h,$$

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$p \left[1 - \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2\sigma \nu \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{при } z = \eta, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 4\sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\eta = \eta_0 \quad \text{при } x=0,$$

где все величины безразмерные.

Неизвестные функции ищем в виде степенного ряда (по степеням σ), то есть

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \dots \\ w &= w_0 + \sigma w_1 + \sigma^2 w_2 + \dots \\ p &= p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \sigma \eta_1 + \sigma^2 \eta_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя значения u , w , p и η из (2.3) в систему уравнений (2.1) и в граничные условия (2.2) и приравнявая коэффициенты при нулевой степени σ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin z + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} &= 0, \\ 2. \quad -\cos z - \frac{\partial p_0}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$3. \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0;$$

$$1. \quad u_0 = 0 \quad \text{при } z = h,$$

$$2. \quad w_0 = -kp_0 \quad \text{при } z = h,$$

$$3. \quad w_0 = u_0 \frac{d\eta_0}{dx} \quad \text{при } z = \eta_0, \quad (2.5)$$

$$4. \quad p_0 = 0 \quad \text{при } z = \eta_0,$$

$$5. \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \eta_0,$$

$$6. \quad \eta_0 = \eta_0 \quad \text{при } x=0.$$

Дважды интегрируя первое уравнение системы (2.4) и учитывая 1 и 5 граничные условия системы (2.5), для u_0 получим следующее выражение:

$$u_0 = \frac{\sin z}{2\nu} [(\eta_0 - h)^2 - (\eta_0 - z)^2]. \quad (2.6)$$

Из уравнения неразрывности, при граничном условии (2), для w_0 получим

$$w_0 = \frac{\sin z}{2\nu} \frac{d\eta_0}{dx} [(\eta_0 - h)^2 - (\eta_0 - z)^2] + \frac{\sin z}{\nu} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\eta_0 - h) (\eta_0 - z). \quad (2.7)$$

Давление определяется из второго уравнения системы (2.4) с учетом граничного условия (4) системы (2.5).

$$p_0 = (\eta_0 - z) \cos z. \quad (2.8)$$

Из третьего уравнения системы (2.5) при условии (6) получим вид свободной поверхности

$$\tau_0 = h + \sqrt{(\tau_0 - h)^2 - 2k\gamma \text{ctg} \alpha \cdot x}. \quad (2.9)$$

Для определения искоемых функций в первом приближении приравняем коэффициенты при первой степени σ . Применяя метод, предложенный в работе [1], получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \\ -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } z = h,$$

$$w_1 = -kp_1 \quad \text{при } z = h,$$

$$w_1 + \tau_1 \frac{\partial w_0}{\partial z} = \left(u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \tau_1 \right) \frac{d\tau_0}{dx} + u_0 \frac{d\tau_0}{dx} \quad \text{при } z = \tau_0,$$

$$p_1 + \tau_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z = \tau_0. \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} + \tau_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = \tau_0,$$

$$\tau_1 = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Решая эту систему с соответствующими граничными условиями, получим следующие значения для неизвестных функций:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sin^2 \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_0 - h)^2 (z - h)^2 + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_0}{dx} (z^2 - h^2) - \\ &- \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} (z - h) \tau_0 + \frac{\sin \alpha}{\nu} (z - h) \tau_1 + \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \times \\ &\times (\tau_0 - h) \left(\frac{z^4}{4} - \tau_0 z^3 + \frac{3}{2} \tau_0^2 z^2 - 4\tau_0^3 z + 2\tau_0^4 h - 3\tau_0^2 h^2 + 2\tau_0 h^3 - \frac{3}{2} h^4 \right); \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\sin^2 \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 (\tau_0 - h)^2 (z - h)^2 - \frac{\sin^2 \alpha}{12\nu^2} \left(\frac{d^2 \tau_0}{dx^2} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \times \\ &\times (\tau_0 - h)^2 (z - h)^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} (\tau_0 - h)^2 (z - h)^2 - \\ &- \frac{\cos \alpha}{6\nu} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} z^3 + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} zh^2 + \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} \frac{dh}{dx} zh + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \tau_{10}}{dx^2} \tau_{10} (z-h)^2 + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} \right)^2 \cdot (z-h)^2 - \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_{10}}{dx} \frac{dh}{dx} \tau_{10} z^2 - \\
& - \frac{\sin \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_{11}}{dx} (z-h)^2 + \frac{\sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \tau_{11} z - \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_{10} - h) \times \\
& \quad \times \left[\frac{d\tau_{10}}{dx} \left(-\frac{z^4}{4} + \tau_{10} z^3 - 6\tau_{10}^2 z^2 + 6\tau_{10}^2 z h - 6\tau_{10} z h^2 + 2zh^3 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{dh}{dx} (2\tau_{10}^3 z - 6\tau_{10}^2 z h + 6\tau_{10} z h^2 - 2zh^3) \right] - \frac{\cos \alpha}{3\nu} \frac{d^2 \tau_{10}}{dx^2} h^3 - \\
& \quad - \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_{10}}{dx} \frac{dh}{dx} h^2 + \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_{10}}{dx} \frac{dh}{dx} \tau_{10} h - \frac{\sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \tau_{11} h + \\
& + \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 \left(-\frac{9h^5}{20} + \frac{7\tau_{10} h^4}{4} - \frac{5\tau_{10}^2 h^3}{2} \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^3} (\tau_{10} - h) \times \\
& \quad \times \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left[\frac{d\tau_{10}}{dx} \left(\frac{7h^4}{4} - 5\tau_{10} h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\tau_{10}^3 h - 6\tau_{10}^2 h^2 - 2h^4) \right] + \\
& + k \sin \alpha \frac{d\tau_{10}}{dx} (\tau_{10} - h) - 2k \sin \alpha \frac{dh}{dx} (\tau_{10} - h) - k \tau_{11} \cos \alpha; \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$p_1 = \sin \alpha \frac{d\tau_{10}}{dx} (\tau_{10} - z) - 2 \sin \alpha \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_{10} - h) + \tau_{11} \cos \alpha; \quad (2.14)$$

$$\tau_{11} = e^{-\int \rho dx} \left(c + \int Q e^{\int \rho dx} dx \right), \quad (2.15)$$

где P и Q — многочлены, зависящие от x .

Уравнения для следующих приближений решаются аналогичным образом. Переходя к размерным величинам, для искомых величин получим

$$\begin{aligned}
u(x, z) = & \frac{g \sin \alpha}{2\nu} |(\tau_{10} - h)^2 - (\tau_{10} - z)^2| + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{4\nu^3} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_{10} - h)^3 \times (z-h)^2 + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_{10}}{dx} (z^2 - h^2) - \\
& - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_{10}}{dx} (z-h) \tau_{10} + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \times \tau_{11} (z-h) + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_{10} - h) \left(\frac{z^4}{4} - \tau_{10} z^3 + \frac{3}{2} \tau_{10}^2 z^2 - 4\tau_{10}^3 z + \right. \\
& \left. + 2\tau_{10}^3 h - 3\tau_{10}^2 h^2 + 2\tau_{10} h^3 - \frac{3}{2} h^4 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x, z) = & \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_{10}}{dx} |(\tau_{10} - h)^2 - (z-h)^2| + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \times \\
& \times (\tau_{10} - h) (\tau_{10} - z) - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{4\nu^3} \left(\frac{d\tau_{10}}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 (\tau_{10} - h)^2 (z-h)^2 - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{12\nu^3} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) (\eta_0 - h)^3 (z - h)^3 + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} (\eta_0 - h)^3 (z - h)^2 - \frac{g \cos \alpha}{6\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} z^3 + \\
& + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} z h^2 + \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} z h + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 (z - h)^2 + \\
& + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 (z - h)^2 - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} \eta_0 z - \\
& - \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \frac{d\eta_0}{dx} (z - h)^2 + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \eta_0 z - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\eta_0 - h) \times \\
& \times \left[\frac{d\eta_0}{dx} \left(-\frac{z^3}{4} + \eta_0 z^2 - 6\eta_0^2 z^2 + 6\eta_0^3 z h - 6\eta_0 z h^2 + 2z h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^3 z - \right. \\
& \left. - 6\eta_0^2 z h + 6\eta_0 z h^2 - 2z h^3) \right] - \frac{g \cos \alpha}{3\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} h^3 - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \times \\
& \times \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} h^3 + \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} \eta_0 h - \frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \eta_0 h + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left(-\frac{9h^5}{20} + \frac{7\eta_0 h^4}{4} - \frac{5\eta_0^2 h^3}{2} \right) + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^3} \times \\
& \times (\eta_0 - h) \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left[\frac{d\eta_0}{dx} \left(\frac{7h^4}{4} - 5\eta_0 h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^3 h - 6\eta_0^2 h^2 - \right. \\
& \left. - 2h^4) \right] + \rho g k \sin \alpha \frac{d\eta_0}{dx} (\eta_0 - h) - 2\rho g k \sin \alpha \frac{dh}{dx} (\eta_0 - h) - \rho g k \eta_0 \cos \alpha, \\
p(x, z) = & \rho g \left[\cos \alpha (\eta_0 - z) + \sin \alpha \frac{d\eta_0}{dx} (\eta_0 - z) - \right. \\
& \left. - 2\sin \alpha \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\eta_0 - h) + \eta_0 \cos \alpha \right],
\end{aligned}$$

$$\eta(x) = h(x) + \sqrt{(\eta_0 - h)^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha x} + e^{-\int \rho dx} (C + \int Q e^{\int \rho dx} dx),$$

$$\text{где } P(x) = \frac{2}{\eta_0 - h} \frac{d\eta_0}{dx} - \frac{1}{\eta_0 - h} \frac{dh}{dx} + \frac{\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha}{(\eta_0 - h)^2},$$

$$Q(x) = -\frac{g \sin \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 (\eta_0 - h)^3 -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g \sin \alpha}{12\nu^2} \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) (\eta_0 - h)^3 + \frac{g \sin \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} (\eta_0 - h)^3 - \\
& - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{6(\eta_0 - h)^2} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0^3 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2(\eta_0 - h)^2} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 h^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{d \eta_0}{dx} \right)^2 - \frac{g \sin \alpha}{6v^2 (\eta_0 - h)^2} \left(\frac{d \eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 \times \\
& \times \left(-\frac{17}{10} \eta_0^5 + 2\eta_0^4 h + 2\eta_0^2 h^3 - 3\eta_0^3 h^2 - \frac{1}{2} \eta_0 h^4 \right) - \frac{g \sin \alpha}{6v^2 (\eta_0 - h)} \left(\frac{d \eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \times \\
& \times \left[\frac{d \eta_0}{dx} \left(-\frac{21}{4} \eta_0^4 + 6\eta_0^3 h - 6\eta_0^2 h^2 + 2\eta_0 h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^4 - 6\eta_0^3 h + 6\eta_0^2 h^2 - \right. \\
& \left. - 2\eta_0 h^3) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \alpha \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \frac{h^3}{(\eta_0 - h)^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{d \eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} \frac{h}{\eta_0 - h} + \\
& + \frac{g \sin \alpha}{6v^2 (\eta_0 - h)} \times \left(\frac{d \eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left[\frac{d \eta_0}{dx} \left(\frac{7}{4} h^4 - 5\eta_0 h^3 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^3 h - 6\eta_0^2 h^2 - 2h^4) \right] - \frac{g \sin \alpha}{4v^2} \left(\frac{d \eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{d \eta_0}{dx} (\eta_0 - h)^2 - \\
& - \frac{g \sin \alpha}{6v^2 (\eta_0 - h)} \left(\frac{d \eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{d \eta_0}{dx} \times \left(-\frac{19}{4} \eta_0^4 - 2\eta_0^3 h - 3\eta_0^2 h^2 + 2\eta_0 h^3 - \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} h^4 \right) + \frac{\rho k v}{\eta_0 - h} \frac{d \eta_0}{dx} - \frac{2\rho k v}{\eta_0 - h} \frac{dh}{dx} - \frac{\eta_0 + h}{\eta_0 - h} \left(\frac{d \eta_0}{dx} \right)^2 \operatorname{ctg} \alpha + \\
& + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\eta_0}{\eta_0 - h} \left(\frac{d \eta_0}{dx} \right)^2.
\end{aligned}$$

Как видно из полученных результатов, если дно канала взять прямолинейным (то есть $h = 0$) получаем результаты работы [2].

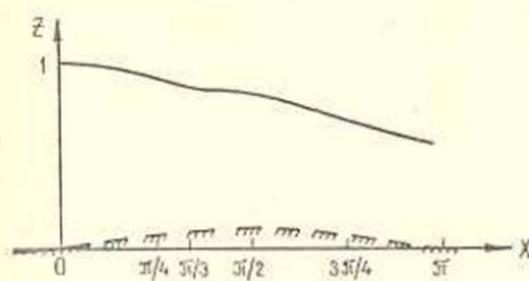
§ 3. Для вычисления конкретного примера, рассмотрим движение воды с начальной глубиной 1 м вдоль пористого русла, угол наклона которого $\alpha = 34'$, а дно описывается кривой $h(x) = 0,1 \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

Примем

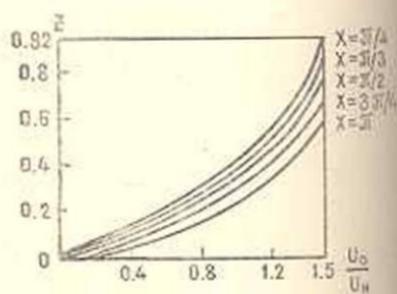
$$\rho = 100 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}, \quad k = 10 \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{сек}}, \quad \nu = 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}.$$

Численный пример решаем, ограничиваясь нулевым приближением.

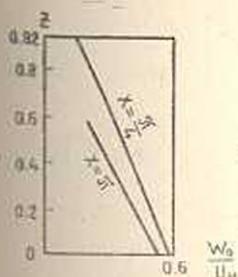
Изменение свободной поверхности вдоль оси ox показано на фиг. 2. Изменение проекций горизонтальной и вертикальной скоростей по глубине потока приведено на фиг. 3 и 4.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Как видно из фиг. 2, непрямолинейность дна существенно влияет на форму свободной поверхности.

На численном примере доказывается, что при $\lambda > 0$ (λ — угловой коэффициент касательной к кривой $z = h(x)$), вертикальная составляющая скорости (w) изменяется гораздо быстрее, чем в интервалах, где $\lambda < 0$. А горизонтальная составляющая (u) — наоборот: при $\lambda > 0$ изменяется медленнее, чем при $\lambda < 0$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 16 V 1964

Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՄԱՍԻՆՅԻՎ ՀԵՂՈՐԿԻ ՇԱՐԺՈՒՐԸ ԲԱՅ ԵՍԿՈՏԿԵՆ ԿԱՄԲԱՅԱԿԱՆ ՀԱՏԱԿ
ՈՐՆԵՑՈՂ ՀՈՒՆՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Հողվածում դիտարկվում է սնտեզմեղի մածուցիկ հեղուկի հարթ լամինար շարժումը բաց հունով, որի հասակը ծախսակեն է և հանդիսանում է ցանկացած նախապես արված կոր:

Խնդիրը բերվում է Նավե-Ստոքսի համառարումների ինտեգրմանը համապատասխան հզրալին պայմաններով: Լուծումը արձայում է փոքր պարամետրի մեթոդով:

Գտնվում է արագության, ճնշման, ինչպես նաև աղառ մակերևույթի փոփոխման օրենքը, և հաշվվում է թվային օրինակ:

Խնդիրը հանդիսանում է նախկինում լուծված ծախսակեն, ուղիղ հատակ ունեցող հունով մածուցիկ հեղուկի շարժման խնդրի ընդհանուր դեպքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабаджанян Г. А., Назарян А. Г. Об одном решении задачи плоского ламинарного движения жидкости в открытом канале, Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 1, 1959.

2. Бабаджанян Г. А., Даниелян Л. Е. Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле, Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 3, 1963.