ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 1, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. САРКИСЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СТЕРЖНЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Многочисленные работы посвящены исследованию задачи об изгибе анизотропных стержней, среди которых особое место занимают работы Сен-Венана [1], В. Фойгта [2], Л. С. Лейбензона [3], С. Г. Лехницкого [4—5] и др.

Решению задачи изгиба неортотропного стержня методом малого параметра (геометрический параметр) посвящены некоторые работы автора (см. [6]).

В работах [7, 8] решены задачи о кручении и об изгибе призматических стержней, обладающих прямолинейной анизотропией частного вида (неортотропные стержни), а в работе [9]—задача кручения стержня с цилиндрической анизотропией.

В настоящей статье предлагается метод решения задачи об изгибе цилиндрического или призматического стержня, обладающего цилиндрической анизотропией такого вида, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси.

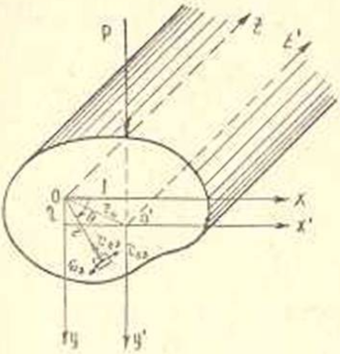
Введением новых переменных решение задачи представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ (физический параметр). Показано, что решение дифференциального уравнения в частных производных с неразделяющимися переменными сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

В качестве примера решена задача об изгибе сплошного кругового цилиндра.

Исследован вопрос о сходимости и существовании решения задачи об изгибе стержня с произвольным поперечным сечением.

§ 1. Метод решения задачи. Пусть цилиндрический или призматический стержень обладает цилиндрической анизотропией такого вида, что в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси z (то есть стержень—неортотропный). Ось анизотропии (по предположению параллельная образующей) обозначим через oz, геометрическую ось тела — $o'z'$, главные оси инерции сечения — x', y', полярную ось — ox, параллельную $o'x'$ (фиг. 1).

Поместим начало координат o' в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P, проходящей через центр тяжести и совпадающей с направлением y'. Примем далее, что упругие постоянные материала удовлетворяют условиям [4]



Фиг. 1.

$$a_{13} = a_{23}, \quad a_{36} = 0. \tag{1.1}$$

Тогда напряженное состояние в сечении стержня будет

$$\begin{gathered}\sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_z = -\frac{P}{I} z y' = \\ = -\frac{P}{I} z \left(r \sin \theta - \eta\right), \\ \tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \tau_1, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \tau_2,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\Psi(r, \theta)$ — функция напряжений при изгибе, I — момент инерции относительно оси x', τ_1 и τ_2 — какие-нибудь частные решения уравнения

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} + \frac{\tau_1}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \tag{1.3}$$

Внеся выражения (1.2) в уравнения совместности и учитывая (1.1), для определения $\Psi(r, \theta)$ получим дифференциальное уравнение с частными производными с неразделяющимися переменными [4]

$$\begin{gathered}a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2a_{45} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{a_{55}}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{a_{44}}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{2a_{13} P}{I} r \cos \theta - 2\vartheta + \\ + a_{44} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial r} + \frac{\tau_2}{r} \right) + a_{45} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{\tau_1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} \right) - \frac{a_{55}}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial \theta},\end{gathered} \tag{1.4}$$

где ϑ — некоторая постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины, a_{ik} — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{44} > 0, \quad a_{55} > 0, \quad a_{44} a_{55} - a_{45}^2 > 0. \tag{1.5}$$

Условие на боковой поверхности будет

$$\tau_{rz} \cos(n, r) + \tau_{\theta z} \cos(n, \theta) = 0, \tag{1.6}$$

а в случае односвязной области сечения —

$$\Psi |_s = \int_0^s (\tau_2 dr - \tau_1 r d\theta). \tag{1.7}$$

Введем новые переменные t и φ, связанные со старыми зависимостями [9]

$$t = \ln \frac{r}{r_0}, \qquad \varphi = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}\,\theta. \tag{1.8}$$

Тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = F_1(t, \varphi, a_{ij}) + \mu F_2(t, \varphi, a_{ij}), \tag{1.9}$$

где

$$a_{44}\Psi(r, \theta) = \Phi(t, \varphi), \quad \mu = \frac{a_{45}}{\sqrt{a_{44}a_{55}}} < 1^*,$$

$$F_1(t, \varphi, a_{ij}) = -\frac{2a_{13}Pr_0^3e^{3t}}{I}\cos\sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}\varphi - 2\vartheta r_0^2 e^{2t} +$$

$$+ a_{44}r_0e^t\left(\frac{\partial \tau_2}{\partial t} + \tau_2\right) - \sqrt{a_{44}a_{55}}\,r_0e^t\,\frac{\partial \tau_1}{\partial \varphi},$$

$$F_2(t, \varphi, a_{ij}) = r_0e^t\left[\sqrt{a_{44}a_{55}}\left(\frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \tau_1\right) - a_{44}\frac{\partial \tau_2}{\partial \varphi}\right]. \tag{1.10}$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными (1.9) в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$\Phi(t, \varphi) = \Phi_0(t, \varphi) + \sum_{i=1}^{\infty}\Phi_i(t, \varphi)\,\mu^i. \tag{1.11}$$

Подставляя значение $\Phi(t, \varphi)$ из выражения (1.11) в дифференциальное уравнение (1.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, находим

$$\Delta\Phi_0 = F_1(t, \varphi, a_{ij}), \tag{1.12}$$

$$\Delta\Phi_1 = F_2(t, \varphi, a_{ij}) + \rho_1(t, \varphi), \tag{1.13}$$

$$\Delta\Phi_i = \rho_i(t, \varphi) \quad (i = 2, 3, \cdots), \tag{1.14}$$

где

$$\rho_i(t, \varphi) = 2\frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial t \partial \varphi}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Из (1.7) при помощи (1.10) и (1.11), легко получается**

$$\Phi_0|_s = r_0\int_0^s e^t\left(\tau_2 dt - \tau_1\sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}\,d\varphi\right),$$

$$\Phi_i|_s = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.9) сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.12)—(1.14) при условии (1.15).

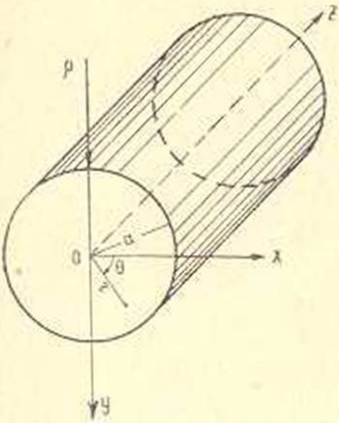
---

* Отметим, что для ортотропного стержня $\mu = 0$.

** Здесь приводятся граничные условия для односвязной области, а для многосвязной области эти условия можно получить из (1.6) при помощи (1.10) и (1.11).

Теперь рассмотрим задачу о распределении напряжений в консоли, имеющей форму сплошного кругового цилиндра.

§ 2. **Изгиб сплошного кругового цилиндра** (фиг. 2). Предположим, что ось анизотропии совпадает с геометрической осью. Тогда можно принять



Фиг. 2.

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = -\frac{P}{I} r^2 \cos\theta, \quad \left(I = \frac{\pi a^4}{4}\right). \tag{2.1}$$

Следовательно, из (1.2) будем иметь

$$\sigma_z = -\frac{P}{I} zr \sin\theta,$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{P}{I} r^2 \cos\theta. \tag{2.2}$$

Условие на поверхности — $\tau_{rz}\big|_{r=a} = 0$ и условие конечности напряжений на оси, учитывая (1.8), (1.10), (1.11), (1.15), можно написать так

$$\Phi_i(t, \varphi) = 0 \quad \text{на} \quad t = 0, \tag{2.3}$$

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-t}\Phi_i(t, \varphi) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.4}$$

Легко видеть, что здесь постоянную ϑ можно положить равной нулю. Тогда, с учетом (2.1), уравнение (1.12) примет вид

$$\Delta\Phi_0 = b_0 e^{3t} \cos\varphi m, \tag{2.5}$$

где

$$b_0 = -\frac{4P(2a_{13} + 3a_{44})}{\pi a}, \quad m = \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}.$$

Ищем решение уравнения (2.5) в виде

$$\Phi_0(t, \varphi) = f_0(t)\cos\varphi m. \tag{2.6}$$

Из (2.5), при помощи (2.6), для определения $f_0(t)$ получим следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 f_0}{dt^2} - m^2 f_0 = b_0 e^{3t}. \tag{2.7}$$

Общее решение уравнения (2.7) при условиях (2.3) и (2.4) можно представить в виде*

---

* Если $m < 1$, то есть $a_{55} < a_{44}$, то около оси будет происходить концентрация напряжений. В этом случае ось анизотропии следует исключить из рассмотрения, окружив ее цилиндром малого радиуса.

$$f_0(t) = \frac{b_0}{m^2 - 9}(e^{mt} - e^{3t}) \quad m \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Итак, при помощи (2.8) и (2.6) можно записать

$$\Phi_0(t, \varphi) = \frac{b_0}{m^2 - 9}(e^{mt} - e^{3t}) \cos \varphi m. \tag{2.9}$$

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Подставляя выражения $\Phi_0(t, \varphi)$ из (2.9) в (1.13), получим

$$\Delta \Phi_1 = b_1(t) \sin m\varphi, \tag{2.10}$$

где

$$b_1(t) = -\frac{4P\sqrt{a_{44}a_{55}}}{\pi a} e^{3t} - \frac{2mb_0}{m^2 - 9}(me^{mt} - 3e^{3t}). \tag{2.11}$$

Представим решение уравнения (2.10) в виде

$$\Phi_1(t, \varphi) = f_1(t) \sin \varphi m. \tag{2.12}$$

Тогда для определения $f_1(t)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} - m^2 f_1 = b_1(t). \tag{2.13}$$

Общее решение уравнения (2.13) при условиях (2.3) и (2.4), как нетрудно видеть, можно записать в виде

$$f_1(t) = \left[d_1\left(t + \frac{6}{9 - m^2}\right) + d_2\right] e^{mt} + d_3 e^{3t}, \tag{2.14}$$

где

$$d_1 = \frac{m^3 b_0}{9 - m^2}, \quad d_2 = \frac{4Pm^2\sqrt{a_{44}a_{55}}}{\pi a(9 - m^2)},$$

$$d_3 = \frac{2m^2}{9 - m^2}\left[\frac{3mb_0}{m^2 - 9} - \frac{2P\sqrt{a_{55}a_{44}}}{\pi a}\right].$$

Следовательно, учитывая (2.12) и (2.14), находим

$$\Phi_1(t, \varphi) = \left\{\left[d_1\left(t + \frac{6}{9 - m^2}\right) + d_2\right] e^{mt} + d_3 e^{3t}\right\} \sin \varphi m. \tag{2.15}$$

Итак, имея $\Phi_1(t, \varphi)$, при помощи (1.14) последовательно можно определить $\Phi_i(t, \varphi)$ $(i = 2, 3, \cdots)$, а следовательно, и значение функции напряжений $\Psi(r, \theta)$, если только интеграл уравнения (1.9), удовлетворяющий условию (1.15), существует и разлагается в сходящийся ряд по положительным степеням μ единственным образом.

Имея функцию напряжений, при помощи формулы (2.2) можно составить картину распределения касательных напряжений с любой точностью.

§ 3. Исследование решения основной краевой задачи. В настоящем параграфе дается исследование решения основного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа с неразделяющимися переменными (1.9) для любой области D, ограниченной достаточно гладкой кривой s, при условии (1.15). Для удобства сформулируем это в виде следующей краевой задачи, которую в дальнейшем будем называть *основной*.

Основная краевая задача*. *Найти решение дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа*

$$L\Phi = -g_0(x_1, x_2) - \mu g_1(x_1, x_2), \qquad \left(L = \Delta - 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \tag{3.1}$$

для области D при граничном условии

$$\Phi|_s = 0. \tag{3.2}$$

Здесь примем, что свободные члены $g_0(x_1, x_2)$ и $g_1(x_1, x_2)$, квадратично-суммируемы в области D, μ—малый численный параметр, а оператор $-L$ положительно определенный.

Прежде чем перейти к исследованию решения основной краевой задачи, приведем некоторые известные факты.

Множество всех функций $\Phi(x) \equiv \Phi(x_1, x_2)$ из $W_2^2(D)$, удовлетворяющих на s условию (3.2), образуют подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)$ пространства $W_2^2(D)$. Норма в $W_2^2(D)$ определяется равенством [10]

$$\|\Phi\|_{W_2^2(D)} = \left\{\iint\limits_D \left[\Phi^2 + \mathrm{grad}^2\,\Phi + \sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)^2\right]dx\right\}^{1/2}. \tag{3.3}$$

Обозначим через $L_2(D)$ множество функций $g(x) \equiv g(x_1, x_2)$, интегрируемых вместе с $g^2(x)$ в конечной области D. Норма в $L_2(D)$ вводится так

$$\|g\|_{L_2(D)} = \left[\iint\limits_D g^2 dx\right]^{1/2}. \tag{3.4}$$

На основании теоремы вложения С. Л. Соболева [10] и работ [11—13] можно установить следующее:

1. Основная краевая задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)$, если $(g_0 + \mu g_1) \in L_2(D)$.

2. Если свободный член $(g_0 + \mu g_1)$ достаточно гладкий, то существует дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение основной краевой задачи (3.1), (3.2).

3. Для любой функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ и любой области D с дважды непрерывно дифференцируемой границей справедливо неравенство

---

* Основную краевую задачу (3.1)—(3.2) при помощи аффинных преобразований можно свести к краевой задаче $\Delta\Phi = -f$ для D^* при $\Phi|_{s^*} = 0$ (*).

Причем, кривая s^*, ограничивающая область D^*, искажается, и решить краевую задачу (*) для области D^* становится существенно трудно. Так, например, для прямоугольника, кругового сектора и т. д.

$$\|\Phi\|_{W_2^2(D)} \leqslant C_1 \|L\Phi\|_{L_2(D)}, \tag{3.5}$$

если только оператор $-L$ положительно-определенный.

Наконец, приведем следующую теорему, доказанную С. Г. Михлиным [14].

Теорема. *Если $g(x_1, x_2)$ — квадратично-суммируемая функция в области круга, а $\Phi(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi = -g(x_1, x_2)$ в $R^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ при краевом условии $\Phi|_{R=1} = 0$, то имеет место неравенство*

$$\iint\limits_{R<1} \left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_m}\right|^2 dx_1 dx_2 \leqslant C^2 \iint\limits_{R<1} |g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2, \quad C = \text{const}. \tag{3.6}$$

Причем, для производных $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}$ и $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}$ $C = \dfrac{3}{2}$, а для $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$ $C = 1$.

Теперь сформулируем и докажем следующие теоремы, которые относятся к поведению решения основной краевой задачи.

Теорема 1. *Существует решение основной краевой задачи (3.1), (3.2), имеющее вид*

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \Phi_k(x_1, x_2), \tag{3.7}$$

причем при $|\mu| < \dfrac{1}{2C_1}$ ряд (3.7) и ряды

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{3.8}$$

сходятся в области D в среднем.

Доказательство. Пусть существует решение основной краевой задачи (3.1), (3.2) в виде (3.7). Тогда при помощи (3.7) из (3.1) и (3.2) можно получить систему рекуррентных краевых задач

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Phi_0 = -g_0(x_1, x_2), \\ &\Phi|_s = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Phi_1 = -g_1(x_1, x_2) - \rho_1(x_1, x_2), \\ &\Phi_1|_s = 0; \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\Phi_k = -\rho_k(x_1, x_2), \\ &\qquad (k = 2, 3, \cdots) \\ &\Phi_k|_s = 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} &\rho_k = -2\frac{\partial^2\Phi_{k-1}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &k = 1, 2, \cdots \end{aligned}\right)\right\}. \tag{3.11}$$

Для доказательства существования такого решения необходимо оценить $\|\Phi_n\|_{L_2(D)}$ в зависимости от n. Для $\|\Phi_0(x_1, x_2)\|_{L_2(D)}$, учитывая (3.3)–(3.5) и (3.9), получим

$$\|\Phi_0\|_{L_2(D)} \leqslant \|\Phi_0\|_{W_2^2(D)} \leqslant A_1(D) \quad (A_1(D) = C_1 \|g_0\|_{L_2(D)}). \tag{3.12}$$

Методом математической индукции доказывается

$$\|\Phi_n\|_{L_2(D)} \leqslant 2^{n-1} C_1^n [B_1(D) + 2A_1(D)] \quad n \geqslant 1 \quad (B(D) = \|g_1\|_{L_2(D)}). \tag{3.13}$$

Из оценок (3.12) и (3.13) следует, что ряд (3.7) в области D сходится в среднем, если только параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{2C_1}. \tag{3.14}$$

Напишем следующее неравенство

$$\left\| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_l} \right\|_{L_2(D)} \leqslant \|\Phi_n\|_{W_2^2(D)} \quad \begin{matrix} (l = 1, 2) \\ n = 0, 1, 2, \cdots \end{matrix} \tag{3.15}$$

Откуда, принимая во внимание (3.12), (3.13), вытекает, что при соблюдении условия (3.14) ряды (3.8) сходятся в области D в среднем.

Итак, теорема доказана.

Когда область D является кругом, то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Существует решение основной краевой задачи, имеющее вид*

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \Phi_k(x_1, x_2), \tag{3.16}$$

причем при $|\mu| < \frac{1}{2}$ *ряд сходится абсолютно и равномерно по* x_1 *и* x_2 *в круге* $x_1^2 + x_2^2 = R^2 \leqslant 1$, *а ряды*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} \quad (l = 1, 2) \tag{3.17}$$

сходятся в этом круге в среднем.

Доказательство. Предположим, что решение основной краевой задачи существует и имеет вид (3.16). Тогда при помощи (3.16) из (3.1) и (3.2) можно получить систему рекуррентных краевых задач (3.9)—(3.11) для круга. Затем решение этой системы, пользуясь обычной формулой [15, 16], можно представить в виде

$$\Phi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R<1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, g_0(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2, \tag{3.18}$$

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{R<1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \left[g_1(\xi_1, \xi_2) - 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right] d\xi_1 d\xi_2, \tag{3.19}$$

$$\Phi_n(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{R<1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad n \geqslant 2, \tag{3.20}$$

где $G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ — функция Грина для оператора Лапласа.

Для доказательства существования решения (3.16) необходимо оценить $|\Phi_n(x_1, x_2)|$ в зависимости от n равномерно по x_1 и x_2 в круге $R<1$. Заметим, что [15]

$$\iint_{R<1} G^2(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 \leqslant \frac{1}{2\pi}. \tag{3.21}$$

Вводя в рассмотрение величины

$$B_0 = \left\{ \iint_{R<1} g_0^2(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 \right\}^{1/2}, \qquad B_1 = \left\{ \iint_{R<1} g_1^2(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 \right\}^{1/2}, \tag{3.22}$$

учитывая (3.18)—(3.22), применяя неравенство Буняковского-Шварца, неравенство треугольника и неравенство (3.6), находим, что

$$|\Phi_0(x_1, x_2)| \leqslant \frac{B_0}{2\pi\sqrt{2\pi}}, \tag{3.23}$$

$$|\Phi_n(x_1, x_2)| \leqslant 2^{n-\frac{5}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} (B_1 + 2B_0) \quad n \geqslant 1. \tag{3.24}$$

Из оценок (3.23) и (3.24) следует, что ряд (3.16) мажорируется числовым рядом с положительными членами

$$2^{-\frac{5}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} \left[2B_0 + (2B_0 + B_1) \sum_{k=1}^{\infty} (2|\mu|)^k \right], \tag{3.25}$$

который, очевидно, сходится как геометрическая прогрессия, если только параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{2}. \tag{3.26}$$

Итак, при соблюдении условия (3.26) ряд (3.16) сходится абсолютно и равномерно по x_1 и x_2 внутри круга $R<1$ и представляет собой решение основной краевой задачи (3.1), (3.2) для круга.

Для доказательства сходимости ряды (3.17) составим скалярное произведение

$$(\Phi, -L\Phi) = -\iint_{R<1} \Phi L\Phi\, dx_1 dx_2. \tag{3.27}$$

Для выражения (3.27), применяя вторую формулу Грина и учитывая (3.2), получим

$$(\Phi, -L\Phi) = \iint_{R<1} \left\{ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)^2 - 2\mu \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)^2 \right\} dx_1 dx_2. \tag{3.28}$$

Теперь составим норму энергии функции $\Phi - \widetilde{\Phi}_n$ ($\widetilde{\Phi}_n = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \cdots + \mu^{n-1}\Phi_{n-1}$)

$$\|\Phi - \widetilde{\Phi}_n\|_L = \sqrt{(-L(\Phi - \widetilde{\Phi}_n),\ \Phi - \widetilde{\Phi}_n)}. \tag{3.29}$$

Принимая во внимание (3.9)—(3.11), нетрудно установить, что

$$L(\Phi - \widetilde{\Phi}_n) = 2\mu^n \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{3.30}$$

Затем, при помощи формул (3.18)—(3.20) и неравенства (3.23)—(3.24), получим

$$|\Phi - \widetilde{\Phi}_n| \leqslant 2^n |\mu|^n \frac{2B_0 + B_1}{2^{1/2} \pi^{1/2} (1 - 2|\mu|)}, \tag{3.31}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right\| \leqslant 2^{n-2} (B_1 + 2B_0). \tag{3.32}$$

Имея ввиду (3.31) и (3.32), оценим

$$\|\Phi - \widetilde{\Phi}_n\|_L^2 \leqslant (2\mu)^{2n} \frac{2B_0 + B_1}{2^{3/2}\pi (1 - 2|\mu|)}. \tag{3.33}$$

Отсюда немедленно вытекает, что $\widetilde{\Phi}_n(x_1, x_2) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{э.}} \Phi(x_1, x_2)$, если только $|\mu| < \frac{1}{2}$. Затем, принимая во внимание (3.28), получим

$$\|\Phi - \widetilde{\Phi}_n\|_L^2 \geqslant (1 - \mu) \iint\limits_{R<1} \left[\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}_n}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}_n}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2. \tag{3.34}$$

Из неравенства (3.34), учитывая сходимость по энергии $\widetilde{\Phi}_n(x_1, x_2)$ к $\Phi(x_1, x_2)$, легко видеть, что

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x_i} \xrightarrow[n \to \infty]{\text{ср.}} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \tag{3.35}$$

Таким образом, теорема доказана.

Замечание. При решении конкретных практических задач обычно ограничиваются вторым или третьим приближениями решения основной краевой задачи (3.1)—(3.2). С этой же точки зрения отметим следующее соображение. Если в ряде (3.16) ограничиться членами, содержащими μ^n, то, как легко видеть, ошибка не будет превосходить величины

$$\delta_n = \frac{(2B_0 + B_1)|\mu|^{n+1} 2^{n - \frac{3}{2}}}{\pi^{1/2}(1 - 2|\mu|)}, \tag{3.36}$$

а относительная погрешность будет

$$\varepsilon_n = \frac{2^n |\mu|^{n+1} (2B_0 + B_1)}{B_0(1 - 2^{n+1}|\mu|^{n+1}) + B_1|\mu|(1 - 2^n|\mu|^n)}.$$

По формуле (3.36) можно установить, что, если потребовать, чтобы ошибка не превосходила 5% при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$, то соответственно $n = 4, 3, 1$.

В заключение выражаю признательность проф. Р. А. Александряну за ценные указания.

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 VIII 1964

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Անիզոտրոպ ձողերի ծռման խնդրի լուծմանը նվիրված են շատ աշխատություններ, որոնց մեջ կարևոր տեղ են գրավում Սեն-Վենանի [1], Վ. Ֆոյխտի [2], Լ. Ս. Լեյբենզոնի [3], Ս. Գ. Լեխնիցկու [4—5] և ուրիշների աշխատությունները։

Հեղինակը փոքր պարամետրերի (երկրաչափական պարամետր) օգնությամբ լուծել է ոչ օրթոտրոպ պրիզմայաձև ձողերի ոլորման և ծռման խնդիրները (տե՛ս [6])։

[7]—[9] աշխատությունները նվիրված են ինչպես ուղղագծային, այնպես էլ գլանային անիզոտրոպիա (ոչ օրթոտրոպ) ունեցող պրիզմայաձև ձողերի ոլորման և ծռման խնդիրներին։

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է գլանային անիզոտրոպիա ունեցող ձողերի ծռման խնդրի լուծման նոր եղանակ։

Լուծումը ներկայացված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր)։ Այդ եղանակով՝ չանջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծմանը։

Որպես կիրառություն լուծված է հոծ շրջանային գլանի ծռման խնդիրը։

Հետազոտված են կամայական լայնական կտրվածք ունեցող ձողի ծռման խնդրի լուծման գոյության և զուգամիտության հարցերը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saint-Venant B.* Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires présentés par divers savants à l'academie des Sciences. Sciences math. et phys., 14, 1856, Paris.
2. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig—Berlin (Teubner), 1928.
3. *Лейбензон Л. С.* Собрание трудов, т. I. Изд. АН СССР, М., 1951.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. *Лехницкий С. Г.* Распределение напряжений в упругом стержне с криволинейной анизотропией под действием растягивающей силы и изгибающих моментов. ПММ, 13, № 3, 1949.

6. *Саркисян В. С.* Кручение и изгиб анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Кандидатская диссертация. МГУ, НИИ мех., 1962.

7. *Саркисян В. С.* К решению задачи кручения анизотропных призматических стержней. Известия АН СССР, ОТН. Мех. и машиностроение, № 2, 1963.

8. *Саркисян В. С.* К решению задачи изгиба анизотропных призматических стержней симметричных профилей. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 5, 1962.

9. *Саркисян В. С.* Об одном способе решения задачи кручения стержня с цилиндрической анизотропией. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 2, 1963.

10. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.

11. *Ладыженская О. А.* О замыкании эллиптического оператора. ДАН СССР, 79, № 5, 1951.

12 *Ладыженская О. А.* Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. Вестник ЛГУ, № 11, 1955.

13. *Жиро Ж.* О проблеме Дирихле. Ann. de l'Ecole Normale, 46, 1929.

14. *Михлин С. Г.* О некоторых оценках, связанных с -функцией Грина. ДАН СССР, 28, № 3, 1951.

15. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.

16. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, М., 1957.