

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. В. МИШЕНКОВ

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ
 ВОЗБУЖДАЕМЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
 УПРУГИХ ПАНЕЛЕЙ

При рассмотрении динамической устойчивости упругих панелей, как правило, невозмущенное состояние панели отождествляют с ее недеформированным состоянием [4,5]. Однако, такая замена становится недопустимой, если невозмущенное состояние оказывается близким к резонансному. Связанные с этим явления для случая стержней и пластин были подробно рассмотрены В. В. Болотиным [1]; им же была предложена механическая модель, описывающая эти явления [3].

Ниже показывается, что учет взаимодействия параметрических и вынужденных колебаний тонких упругих панелей приводит к значительному расширению областей динамической неустойчивости. Устанавливается возможность возбуждения колебаний в зоне частот, близких к частотам собственных продольных колебаний.

§ 1. Рассмотрим упругую изотропную цилиндрическую панель, опирающуюся на прямоугольный в плане контур со сторонами a и b . Если пользоваться основными гипотезами нелинейной теории оболочек, то деформацию срединной поверхности панели можно описать системой уравнений

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Здесь $w(x, y)$ — нормальный прогиб, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, h — толщина панели, E — модуль упругости материала, R — радиус кривизны срединной поверхности панели, Φ — функция, связанная с усилиями в срединной поверхности известными соотношениями

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = N_y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -N_{xy}.$$

Для возмущенного состояния панели нормальную нагрузку q представим в виде

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность материала панели, а ε — характеристика затухания.

Для конкретности будем предполагать, что панель свободно оперта по контуру, то есть прогиб w удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \quad (x=0, x=a), \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \quad (y=0, y=b), \end{aligned} \quad (1.3)$$

а круговые края загружены равномерно распределенными периодическими продольными силами $p = p_0 + p_1 \cos \Omega t$. Предположим также, что кромки $x=0$ и $x=a$ смещаются свободно, а усилия, возникающие при деформациях на продольных кромках $y=0$ и $y=b$ „в среднем“ равны нулю.

Для того, чтобы оценить влияние продольных сил инерции, поступим аналогично тому, как это сделано в [1]. Будем пренебрегать продольными силами инерции самой панели и предположим, что вся „продольная“ масса сосредоточена в загрузочных балках, расположенных по круговым торцам. Сформулированные выше граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} dy &= -(p_0 + p_1 \cos \Omega t) + m_0 \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (x=0, x=a), \\ \frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} dx &= 0 \quad (y=0, y=b), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} dy = 0 \quad (x=0, x=a), \quad \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} dx = 0 \quad (y=0, y=b),$$

где m_0 — „погонная“ масса загрузочной балки, а u — перемещение точки срединной поверхности панели в продольном направлении.

§ 2. Представим приближенно искомую функцию $w(x, y)$ в виде

$$w(x, y) = \zeta(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (2.1)$$

где $\zeta(t)$ — неизвестная пока функция времени, характеризующая форму колебаний панели. Используя второе уравнение системы (1.1), условия (1.4) и решение (2.1), с помощью процедуры Бубнова—Галеркина нетрудно получить выражение для определения функции усилий $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \frac{Eh}{32} \zeta^2 \left(m^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{m^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \\ + \frac{Eh}{R\pi^2} \frac{a^2}{(1+m^2)^2} \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{2} (p_0 + p_t \cos \theta t) y^2 + \frac{1}{2} m_0 \frac{d^2 u}{dt^2} y^2, \quad (2.2)$$

где $m=a/b$. С помощью (2.2) найдем осредненные усилия, возникающие в срединной поверхности при деформациях панели

$$N_x = -\frac{Eh}{8} \frac{\pi^2}{a^2} \zeta^2 \cos \frac{2\pi x}{a} - \frac{Eh}{R} \frac{1}{(1+m^2)^2} \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \\ - (p_0 + p_t \cos \theta t) + m_0 \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad (2.3)$$

$$N_y = -\frac{Eh}{8} \frac{\pi^2}{b^2} \zeta^2 \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{Eh}{R} \frac{m^2}{(1+m^2)^2} \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Определим взаимное сближение криволинейных кромок [2]

$$u = -\frac{1}{b} \int_0^b \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = -\frac{1}{b} \int_0^b \int_0^a \left[\frac{N_x - \mu N_y}{Eh} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.4)$$

Используя выражение (2.4), нетрудно получить уравнение, связывающее перемещения точек срединной поверхности панели в продольном и нормальном направлениях

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \bar{u} = \frac{4}{\pi^2} \frac{a}{R} \frac{1 - \mu m^2}{(1+m^2)^2} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{a} z^2 + \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{Eh} \frac{a}{h}. \quad (2.5)$$

Здесь $\omega_0 = [Eh(m_0 a)^{-1}]^{1/2}$ — частота собственных продольных колебаний, вычисленная в предположении, что вся масса панели сосредоточена по торцам $x=0$ и $x=a$; $\bar{u} = u/h$, $z = \zeta/h$ — безразмерные параметры перемещений.

Для получения второго уравнения, описывающего деформацию панели при изгибе, по-прежнему применим процедуру Бубнова — Галеркина. Используя первое уравнение системы (1.1), решение (2.1) и (2.2), получим

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} + z\omega_1^2 \left(1 - \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{p_*} + \frac{m_0}{p_*} h \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} \right) - \\ - \beta \omega_1^2 z^2 + \alpha \omega_1^2 z^3 = 0, \quad (2.6)$$

Здесь вводятся обозначения:

$$\omega_1^2 = \pi^2/a^2 [DF(\phi h)^{-1}]^{1/2}$$

— частота собственных поперечных колебаний панели; $p_* = \pi^2/a^2 DF$ — верхнее критическое значение продольной нагрузки; $K = a^2/Rh$, $F = (1+m^2)^2 + 12(1-\mu^2)K^2 [\pi^4(1+m^2)^2]^{-1}$ — безразмерные характеристики панели;

$\alpha = 3(1 - \mu^2)(1 + m^4)(4F)^{-1}$, $\beta = 16/\pi F(1 - \mu^2)m^2K[1/2 + 8/(1 + m^2)^2]$ — безразмерные коэффициенты, характеризующие геометрическую нелинейность панели. Заметим, что при $m_0 = 0$ уравнение (2.5) определяет перемещение в продольном направлении, а (2.6) обращается в уравнение, хорошо изученное ранее в работах [4,5].

Остановимся на условиях возникновения незатухающих поперечных колебаний, пренебрегая в уравнении (2.6) нелинейными членами, зависящими от нормального перемещения z . Вместо (2.5) рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \bar{u} = \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{Eh} \frac{a}{h}, \quad (2.7)$$

для которого нетрудно получить решение, соответствующее установившемуся режиму продольных колебаний

$$\bar{u} = \frac{a}{h} \frac{p_0}{Eh} + \frac{a}{h} \frac{p_t}{Eh} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \cos \theta t. \quad (2.8)$$

Найденное выражение для $\bar{u}$ подставим в линеаризованное уравнение (2.6). После преобразований получим

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\nu \psi \cos \theta t) z = 0, \quad (2.9)$$

где $\Omega = \omega_1 (1 - p_0/p_*)^{-1}$ — частота собственных поперечных колебаний с учетом сжимающих продольных сил, $2\nu = p_t (p_* - p_0)^{-1}$ — коэффициент возбуждения, а через ψ обозначен безразмерный параметр частоты

$$\psi = \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega_0}\right)^2\right]^{-1}. \quad (2.10)$$

Параметр (2.10) удобнее представить в виде $\psi = (1 - \mu^2 \gamma^2)^{-1}$, если обозначить $\mu = \theta/\Omega$, $\gamma = \Omega/\omega_0$. Из (2.10) видно, что $\psi \rightarrow \infty$, если частота возмущения близка к частоте собственных продольных колебаний ($\theta \approx \omega_0$), и $\psi \rightarrow 1$, если масса загрузочной балки весьма мала ($\omega_0 \rightarrow \infty$).

Уравнение вида (2.9) подробно исследовалось в работе [1], где, в частности, было показано, что при значениях γ , близких к единице, границы областей неустойчивости нулевых решений уравнения значительно расширяются.

Обратимся к уравнениям (2.5) и (2.6), для последующих вычислений запишем их в виде

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \bar{u} = \frac{4a}{R\pi^2} \frac{1 - \mu^2 m^2}{(1 + m^2)^2} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{a} z^2 + \frac{a}{h} \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{Eh}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 \left[z - \frac{12(1 - \mu^2)}{\pi^2 F} \frac{a}{h} z \bar{u} - z^2 (\beta - \beta_0) + z^3 (z + z_0) \right] = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\alpha_0 = 3(1 - \mu^2)(2F)^{-1}, \quad \beta_0 = 48(1 - \mu^2)(1 - \mu m^2)K[\pi^4(1 + m^2)^2 F]^{-1}.$$

§3. Будем искать приближенное решение системы уравнений (2.11) и (2.12), соответствующее процессу установившихся колебаний, в виде

$$\bar{u} = a_0 + a_1 \cos \theta t, \quad z = b_0 + b_1 \cos \frac{\theta t}{2}, \quad (3.1)$$

где a_0, a_1, b_0, b_1 — коэффициенты, подлежащие определению. Подставим (3.1) в уравнение (2.11). После выделения постоянных членов, и членов, содержащих первую гармонику, получим

$$a_0 = \frac{4(1 - \mu m^2)}{\pi^2(1 + m^2)^2 R} \frac{a}{b_0} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{a} \left(b_0^2 + \frac{b_1^2}{2} \right) + \frac{p_0}{Eh} \frac{a}{h},$$

$$a_1 = \psi \left(\frac{\pi^2}{16} \frac{h}{a} b_1^2 + \frac{p_1}{Eh} \frac{a}{h} \right). \quad (3.2)$$

Аналогичную процедуру выполним для уравнения (2.12); после некоторых преобразований получим

$$1 - b_0 \bar{\beta} + b_0^2 \bar{\alpha} + \frac{1}{2} b_1^2 \left[(3\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) - \frac{\bar{\beta} - \bar{\beta}_0}{b_0} \right] = 0, \quad (3.3)$$

$$1 - \frac{n^2}{4} - \psi \bar{\psi} - b_0 (2\bar{\beta} - \bar{\beta}_0) + b_0^2 (3\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) +$$

$$+ \frac{3}{4} b_1^2 \left[\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}_0}{3} (1 - \psi) \right] = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{1 - p_0/p_*}, \quad \bar{\beta}_i = \frac{\beta_i}{1 - p_0/p_*}.$$

Другое приближенное решение системы уравнений (2.11) и (2.12) получим, если вместо (3.1) возьмем

$$\bar{u} = a_0 + a_1 \cos \theta t, \quad z = b_0 - b_1 \cos \frac{\theta t}{2}.$$

Повторив предыдущие выкладки, вместо уравнения (3.4) будем иметь

$$1 - \frac{n^2}{4} + \psi \bar{\psi} - b_0 (2\bar{\beta} - \bar{\beta}_0) + b_0^2 (3\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) + \frac{3}{4} b_1^2 \left[\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}_0}{3} (1 - \psi) \right] = 0, \quad (3.5)$$

а уравнение (3.3) останется прежним.

Если масса загрузочной балки $m_0 \rightarrow 0$, то $\omega_0 \rightarrow \infty$, а $\psi \rightarrow 1$. Нетрудно показать, что формулы (3.3), (3.4) и (3.5) в этом предельном случае совпадают с рассмотренными ранее в работах [4, 5].

§4. Границы областей неустойчивости нулевых решений уравнений (3.4) и (3.5) определяются формулой

$$1 - \frac{n^2}{4} \pm \nu\psi = 0$$

или

$$(4 - n^2)(1 - n^2\gamma^2) \pm 4\nu = 0. \quad (4.1)$$

Формула (4.1) дает две области неустойчивости. Одна из них лежит вблизи $n^2 = 4$, что соответствует главному параметрическому резонансу, другая — вблизи $n^2 = 1/\gamma^2$, что соответствует частоте возмущения, совпадающей с частотой собственных продольных колебаний. Нетрудно показать, что области неустойчивости сливаются в одну, если

$$\nu_* = \frac{(1 - 4\gamma^2)^2}{16\gamma^2}, \quad (4.2)$$

что соответствует безразмерной частоте

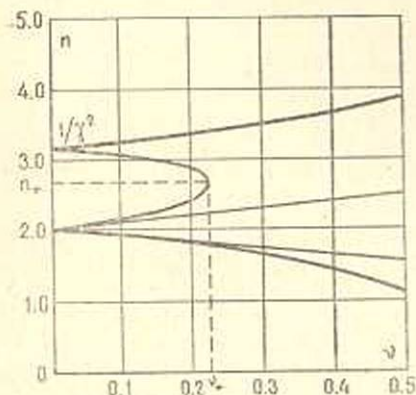
$$n_* = \left(2 + \frac{1}{2\gamma^2}\right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Дадим оценку для коэффициента частоты γ ; учитывая обозначения, принятые ранее, получим

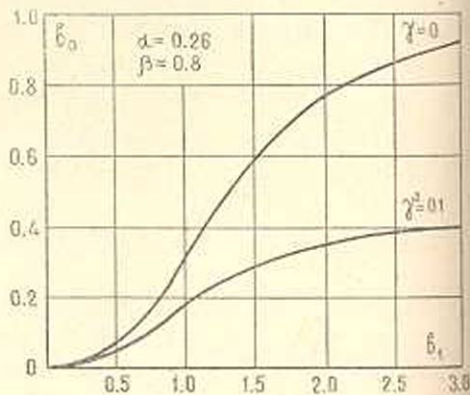
$$\gamma^2 = \frac{\pi^4}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 m F \frac{M_0}{M} (1 - p_0/p_*). \quad (4.4)$$

Предположим, что $m = 1$, $h = 0,01a$, $\mu = 0,3$, $M_0 = 15M$, $p_0/p_* = 0,45$, $K = 13$; тогда при помощи (4.2), (4.3) и (4.4) получим $\nu_* = 0,225$, $n_* = 2,65$, $\gamma^2 = 0,1$, то есть слияние областей неустойчивости возможно лишь при значительной массе загрузочной балки и при больших амплитудах нагружки.

График зависимости (4.1) представлен на фиг. 1, где тонкими линиями показаны границы главной области неустойчивости, подсчитан-

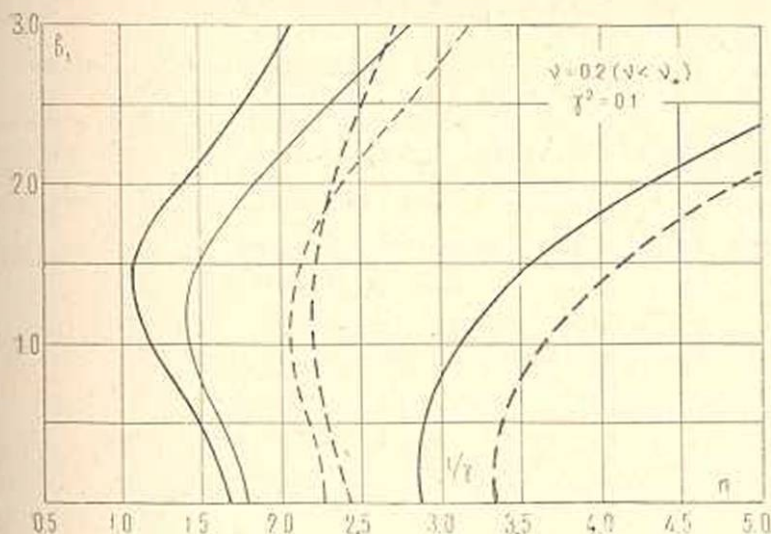


Фиг. 1.



Фиг. 2.

ные без учета взаимодействия. На графике видна область неустойчивости, соответствующая резонансу относительно продольной частоты.



Фиг. 3.

Для построения амплитудно-частотных кривых воспользуемся формулами (3.3), (3.4) и (3.5) и параметрами панели, которые приняты выше. Значения коэффициентов, входящих в (3.3), (3.4) и (3.5) при этом будут равны: $F=8,7$, $\alpha=0,26$, $\beta=0,8$, $\alpha_0=0,28$, $\beta_0=0,21$, $\gamma^2=0,1$. На фиг. 2 зависимость (3.3) представлена в графической форме. Графики амплитудно-частотных кривых приводятся на фиг. 3 (для случая, когда $v < v_*$). Тонкими линиями показаны решения для случая, когда масса загрузочной балки не учитывается; пунктиром показаны неустойчивые решения.

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Поступила 25 VI 1964

Ч. 4. ШИШЕНКО

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻԿԱՌԵՆ «ԳՐԳՈՎՈՂ»
ԵՎ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՅԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հաղվածում դիտարկվում է բարակ տառաչափական պանելների պարամետրիկորեն զրգավող և ստիպողական տատանումների փոխազդեցության հարցը: Յուրջ է արվում, որ բարակ տառաչափական պանելների պարամետրիկորեն և ստիպողական տատանումների փոխազդեցության հաշվարկը հանգեցնում է շինամիջին անկախությունից անհրաժեշտության դեպքում ընդլայնմանը: Հաստատվում է տատանումների զրգավման հնարավորությունը այն հաճախականությունների գոտում, որոնք մաս են սեփական լայնական տատանումների հաճախականություններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластины и оболочки. Гостехиздат, 1956.
3. *Болотин В. В.* Об одной механической модели, описывающей взаимодействие параметрических и вынужденных колебаний. Труды Моск. энергетич. ин-та, вып. 32, механ., 1959.
4. *Мищенко Г. В.* О динамической устойчивости-пологих упругих панелей. Инж. журнал, 1, № 2, 1961.
5. *Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости оболочек. Известия АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, № 4, 1961.