ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 4, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. А. Алоян

О динамической устойчивости синусоидальной арки

§ 1. Дифференциальные уравнения динамической устойчивости арки и их решение

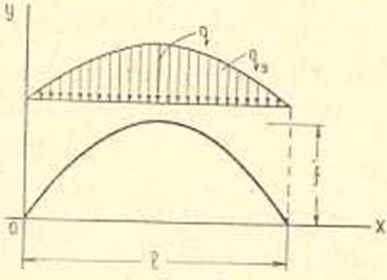
Пусть на арку, ось которой находится в плоскости xoy, действует вертикальная нагрузка, интенсивность которой вдоль пролета арки меняется по закону (фиг. 1)

$$q_y = -q \sin\frac{\pi}{l}x, \tag{1.1}$$

где l — пролет арки, q — интенсивность нагрузки в середине пролета арки.

Дифференциальные уравнения статического равновесия тонкого криволинейного стержня в декартовой системе координат, полученные в работе [4], имеют вид

$$\frac{dN_x}{dx} - y'q_x = 0,$$
$$\frac{dN_y}{dx} - q_y = 0, \tag{1.2}$$
$$\frac{dM}{dx} - N_y + y'N_x = 0.$$



Фиг. 1.

Здесь N_x и N_y — проекции главного вектора внутренних сил в сечении с абсциссой x соответственно на оси x и y, M — изгибающий момент, q_x и q_y — проекции внешней нагрузки соответственно на оси x и y, $y = \varphi(x)$ — уравнение осевой линии арки.

Если ось арки совпадает с веревочной кривой от данной нагрузки, то арка будет испытывать только сжатие или растяжение, но не изгиб. Тогда во всех сечениях изгибающий момент $M = 0$. Подставляя в (1.2) $q_x = 0$, $M = 0$ и $q_y = -q\sin\frac{\pi}{l}x$, получим

$$\frac{dN_x^0}{dx} = 0,$$
$$\frac{dN_y^0}{dx} + q\sin\frac{\pi}{l}x = 0, \tag{1.3}$$
$$-N_y^0 + y'N_x^0 = 0,$$

где N_x^0 и N_y^0 — соответственно значения N_x и N_y в безмоментном состоянии равновесия.

Из первого уравнения системы (1.3) имеем $N_x^0 = \text{const}$. Исключив из остальных двух уравнений N_y^0, получим для y следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q}{N_x^0} \sin \frac{\pi}{l} x = 0,$$

решение которого имеет вид

$$y = \frac{ql^2}{\pi^2 N_x^0} \sin \frac{\pi}{l} x + C_1 x + C_2.$$

Для определения C_1 и C_2 имеем следующие условия

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

из которых получаем, что $C_1 = C_2 = 0$. При $x = \frac{l}{2}$ условие $y = f$, где f — стрела подъема арки, устанавливает следующую зависимость между параметрами осевой линии арки и внешней нагрузки

$$f = \frac{ql^2}{\pi^2 N_x^0}. \tag{1.4}$$

Следовательно, веревочная кривая для нагрузки вида $q_x = 0$, $q_y = -q \sin \frac{\pi}{l} x$ есть синусоида, уравнение которой

$$y = f \sin \frac{\pi}{l} x. \tag{1.5}$$

Дифференциальное уравнение динамической устойчивости криволинейных стержней, ось которых совпадает с веревочной кривой от данной нагрузки, полученное в работе [4], имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[N_x^0 (1 + y'^2) \frac{\partial v}{\partial x}\right] + \left(q_x y' \frac{\partial v}{\partial x} - q_y \frac{\partial u}{\partial x}\right) +$$

$$+ m(x) \sqrt{1+y'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v - y'u) = 0, \tag{1.6}$$

где u и v — проекции перемещения точек оси арки соответственно на оси x и y, $B(x)$ — жесткость при изгибе в плоскости кривизны стержня, $m(x)$ — масса единицы длины стержня в сечении с абсциссой x.

При выводе дифференциального уравнения (1.6) рассматривались такие отклонения оси криволинейного стержня от ее первоначального недеформированного состояния, при которых удлинения осевой линии считались малой величиной второго порядка. Это условие дает следующую зависимость между перемещениями u и v

$$u' = -y'v', \tag{1.7}$$

полученную в работе [2]. В этой же работе дано изменение кривизны осевой линии криволинейного стержня

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\sqrt{1+y'^2}} \tag{1.8}$$

и условие, выражающее отсутствие поворота какого-либо сечения

$$\frac{dv}{dx} = 0. \tag{1.9}$$

Подставляя в (1.6) $q_x = 0$, а также значения N_x^0 и q_y соответственно из (1.4) и (1.1) в предположении, что $q = q(t)$ является некоторой периодической функцией времени, получим систему дифференциальных уравнений динамической устойчивости синусоидальной арки

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + q(t)\left\{\frac{l^2}{\pi^2 f}\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \sin\frac{\pi}{l}x\frac{\partial u}{\partial x}\right\} +$$

$$+ m(x)\sqrt{1+y'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}(v - y'u) = 0, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y'\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Решение (1.10) ищем в виде

$$\begin{aligned} v(x,\ t) &= V(x)\,T(t), \\ u(x,\ t) &= U(x)\,T(t). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Нетрудно убедиться, что точное разделение переменных в первом из уравнений системы (1.10) подстановкой (1.11) невозможно. Поэтому задачу будем решать приближенным методом Бубнова-Галеркина.

Применяя этот метод к первому из уравнений системы (1.10) (переменные разделяются приближенно [3]), для функции $T(t)$ получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2\left[1 - \frac{q(t)}{q_{кр}}\right]T(t) = 0, \tag{1.12}$$

где

$$\omega^2 = \frac{\int\limits_0^l \left\{\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{d^2V}{dx^2}\right]\right\}V\,dx}{\int\limits_0^l m(x)\sqrt{1+y'^2}\,(V - y'U)\,V dx} \tag{1.13}$$

— приближенное значение квадрата частоты свободных плоских, изгибных колебаний ненагруженной синусоидальной арки, а

$$q_{kp} = -\frac{\int\limits_0^l \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{d^2V}{dx^2} \right] \right\} V dx}{\int\limits_0^l \left\{ \frac{l^2}{\pi^2 f} \frac{d}{dx} \left[(1+y'^2) \frac{dV}{dx} \right] + \sin\frac{\pi}{l}x \, \frac{dU}{dx} \right\} V dx} \tag{1.14}$$

— критическое значение интенсивности нагрузки в середине пролета.

Второе уравнение системы (1.10) с учетом (1.11) примет вид

$$\frac{dU}{dx} = -y' \frac{dV}{dx}. \tag{1.15}$$

Если $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$, то уравнение (1.12) приводится к известному уравнению Матье

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega_q^2 (1 - \mu \cos pt) T(t) = 0, \tag{1.16}$$

где

$$\omega_q^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{q_1}{q_{кр}} \right) \tag{1.17}$$

— квадрат частоты свободных плоских колебаний синусоидальной арки, нагруженной распределенной по закону (1.1) статической нагрузкой с интенсивностью q_1 в середине пролета, а

$$\mu = \frac{q_0}{q_{кр} - q_1} \tag{1.18}$$

— коэффициент пульсации.

Границы первой, наиболее опасной, области динамической неустойчивости определяются следующей формулой [1]

$$p = 2\omega_q \sqrt{1 \pm \frac{1}{2}\mu}. \tag{1.19}$$

Для определения областей динамической неустойчивости сначала необходимо в каждом частном случае определить ω_q^2 и μ из (1.13)—(1.18).

Перейдем к определению этих коэффициентов.

§ 2. Двухшарнирная синусоидальная арка переменного поперечного сечения

Граничные условия двухшарнирной арки имеют вид

$$u = v = M = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \text{ и } x = l. \tag{2.1}$$

Принимая во внимание (1.11) и выражение изгибающего момента

$$M(x) = B(x)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{B(x)}{\sqrt{1+y'^2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{2.2}$$

перепишем условия (2.1) в виде

$$U = V = V'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l. \tag{2.3}$$

Рассмотрим кососимметричную форму отклонения арки от ее первоначального недеформированного состояния. В качестве аппроксимирующей функции примем функцию

$$V(x) = a \sin \frac{2\pi}{l} x, \tag{2.4}$$

удовлетворяющую (2.3).

Подставляя значения y и $V(x)$ соответственно из (1.5) и (2.4) в (1.15), интегрируя и учитывая, что $U(0) = U(l) = 0$, для $U(x)$ получим следующее выражение

$$U(x) = -a\lambda \left(\sin \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x \right), \tag{2.5}$$

где $\lambda = \frac{\pi f}{l}$.

Рассмотрим два случая изменения поперечного сечения арки.

Первый случай. Сечение арки прямоугольное: высота остается постоянной, а ширина меняется по закону

$$b(x) = \frac{b_{\text{кл}}}{\cos \psi} = b_{\text{кл}} \sqrt{1 + y'^2},$$

где $b_{\text{кл}}$ — ширина ключевого сечения, ψ — угол наклона к горизонту касательной к оси арки.

В этом случае жесткость при изгибе и масса единицы длины арки в сечении с абсциссой x определяются по выражениям

$$B(x) = \frac{B_{\text{кл}}}{\cos \psi} = B_{\text{кл}} \sqrt{1 + y'^2}, \qquad m(x) = m_{\text{кл}} \sqrt{1 + y'^2},$$

где $B_{\text{кл}} = E \frac{b_{\text{кл}} h^3}{12}$ — жесткость при изгибе ключевого сечения, $h = \text{const}$ — высота сечений, $m_{\text{кл}} = \frac{\gamma}{g} b_{\text{кл}} h$ — масса единицы длины в ключевом сечении, γ — объемный вес, E — модуль упругости материала арки, g — ускорение силы тяжести.

Для этого случая изменения поперечных сечений выражение (1.13) принимает вид

$$\omega^2 = \frac{B_{\text{кл}} \int\limits_0^l \frac{d^4 V}{dx^4} V dx}{m_{\text{кл}} \int\limits_0^l (1 + y'^2)(V - y'U) V dx}, \tag{2.6}$$

а выражение (1.14) после интегрирования по частям его знаменателя, с учетом (2.3), приводится к виду

$$q_{\text{кр}} = \frac{B_{\text{кл}} \int\limits_0^l \frac{d^4V}{dx^4} V dx}{\int\limits_0^l \left[\frac{l^2}{\pi^2 f} (1 + y'^2) \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 - \sin \frac{\pi}{l} x \frac{dU}{dx} V \right] dx}. \qquad (2.7)$$

Подставляя значения y, $V(x)$ и $U(x)$ соответственно из (1.5), (2.4) и (2.5) в (2.6) и (2.7), получим приближенное значение квадрата частоты и критическое значение интенсивности нагрузки в середине пролета

$$\omega^2 = \frac{16\pi^4}{1 + \frac{7}{6}\lambda^2 + \frac{9}{24}\lambda^4} \frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}} l^4} = \varphi_1^2 \frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}} l^4},$$

$$q_{\text{кр}} = \frac{8\pi^3\lambda}{2 + \lambda^2} \frac{B_{\text{кл}}}{l^3} = K_1 \frac{B_{\text{кл}}}{l^3}.$$

Второй случай. Сечение арки прямоугольное: ширина остается постоянной, а высота меняется по закону

$$h(x) = \frac{h_{\text{кл}}}{\cos\psi} = h_{\text{кл}} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Тогда для жесткости при изгибе и массы единицы длины арки в сечении с абсциссой x будем иметь

$$B(x) = \frac{B_{\text{кл}}}{\cos^3\psi} = B_{\text{кл}} (1 + y'^2)^{3/2}, \quad m(x) = m_{\text{кл}} \sqrt{1 + y'^2}, \qquad (2.8)$$

где

$$B_{\text{кл}} = \frac{b h_{\text{кл}}^3}{12}, \qquad m_{\text{кл}} = \frac{\gamma}{g} b h_{\text{кл}}.$$

Интегрируя по частям знаменатель выражения (1.14) и двукратно интегрируя по частям числители выражений (1.13) и (1.14) с учетом (2.3) и (2,8), получим

$$\omega^2 = \frac{B_{\text{кл}} \int\limits_0^l (1 + y'^2) \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)^2 dx}{m_{\text{кл}} \int\limits_0^l (1 + y'^2)(V - y'U) V dx}, \qquad (2.9)$$

$$q_{\text{кр}} = \frac{B_{\text{кл}} \int\limits_0^l (1 + y'^2) \left(\frac{d^2 V}{dx^2}\right)^2 dx}{\int\limits_0^l \left[\frac{l^2}{\pi^2 f}(1 + y'^2)\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 - \sin\frac{\pi}{l}x\frac{dU}{dx}V\right] dx}. \tag{2.10}$$

Подставляя значения y, $V(x)$ и $U(x)$ соответственно из (1.5), (2.4) и (2.5) в (2.9) и (2.10), получим приближенное значение квадрата частоты и критическое значение интенсивности нагрузки в середине пролета

$$\omega^2 = \frac{8\pi^4 (2 + \lambda^2)}{1 + \frac{7}{6}\lambda^2 + \frac{9}{24}\lambda^4} \frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}} l^4} = \varphi_2^2 \frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}} l^4},$$

$$q_{\text{кр}} = 4\pi^3 \lambda \frac{B_{\text{кл}}}{l^3} = K_2 \frac{B_{\text{кл}}}{l^3}.$$

Некоторые значения коэффициентов частоты φ_1, φ_2 и устойчивости K_1 и K_2 приведены в табл. 1.

Таблица 1

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
φ_1	36,79	32,03	25,86	20,31	15,90	12,56	8,17	5,64
φ_2	37,69	35,05	31,06	27,17	23,77	20,93	16,66	13,73
K_1	37,13	65,08	80,94	87,09	87,22	84,20	74,96	65,65
K_2	38,96	77,93	116,89	155,85	194,82	233,78	311,71	389,64

§ 3. Бесшарнирная синусоидальная арка переменного поперечного сечения

Граничные условия бесшарнирной арки с учетом (1.9) и (1.11) можно написать в виде

$$U = V = V' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l. \tag{3.1}$$

Антисимметричную форму отклонения синусоидальной бесшарнирной арки от ее первоначального недеформированного состояния аппроксимируем функцией

$$V(x) = a \sin\frac{\pi}{l}x \sin\frac{2\pi}{l}x, \tag{3.2}$$

удовлетворяющей граничным условиям (3.1).

Подставляя значения y и $V(x)$ соответственно из (1.5) и (3.2) в (1.15), интегрируя и учитывая, что $U(0) = U(l) = 0$, получим для $U(x)$ следующее выражение

$$U(x) = a\frac{\lambda}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{l}x + \frac{3}{4}\cos\frac{4\pi}{l}x - \frac{7}{4}\right). \qquad (3.3)$$

Рассмотрим вышеупомянутые два случая изменения поперечных сечений арки.

Первый случай. В этом случае изменения поперечных сечений выражения (1.13) и (1.14) с учетом (3.1) приводятся к виду (2.6) и (2.7).

Подставляя значения y, $V(x)$ и $U(x)$ соответственно из (1.5), (3.2) и (3.3) в (2.6) и (2.7), получим

$$\omega^2 = \frac{41\pi^4}{1 + \frac{29}{32}\lambda^2 + \frac{15}{64}\lambda^4}\,\frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}}l^4} = \varphi_3^2\frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}}l^4},$$

$$q_{\text{кр}} = \frac{41\pi^3\lambda}{5 + \frac{7}{4}\lambda^2}\,\frac{B_{\text{кл}}}{l^3} = K_3\frac{B_{\text{кл}}}{l^3}.$$

Второй случай. Интегрированием по частям знаменателя (1.14) и двукратным интегрированием по частям числителей выражений (1.13) и (1.14), с учетом (3.1) и (2.8), выражения (1.13) и (1.14) приводятся к виду (2.9) и (2.10).

Подставляя значения y, $V(x)$ и $U(x)$ соответственно из (1.5), (3.2) и (3.3) в (2.9) и (2.10), получим

$$\omega^2 = \frac{\pi^4\left(41 + \frac{147}{8}\lambda^2\right)}{1 + \frac{29}{32}\lambda^2 + \frac{15}{64}\lambda^4}\,\frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}}l^4} = \varphi_4^2\frac{B_{\text{кл}}}{m_{\text{кл}}l^4},$$

$$q_{kp} = \frac{\pi^3\lambda\left(41 + \frac{147}{8}\lambda^2\right)}{5 + \frac{7}{4}\lambda^2}\,\frac{B_{\text{кл}}}{l^3} = K_4\frac{B_{\text{кл}}}{l^3}.$$

Некоторые значения коэффициентов частот φ_3, φ_4 и устойчивости K_3, K_4 приведены в табл. 2.

Таблица 2

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
φ_3	60,49	53,52	44,80	36,39	29,27	23,58	15,76	11,04
φ_4	61,81	58,06	52,97	47,56	42,47	37,71	30,85	25,71
K_3	77,21	140,36	182,79	205,77	214,31	213,61	199,02	179,32
K_4	80,62	165,19	255,56	351,40	451,29	553,76	762,41	972,50

* * *

Таким образом, для нагрузки вида $q(t) = q_1 + q_0 \cos pt$ исследование динамической устойчивости синусоидальной арки приводится к уравнению (1.16) типа Матье. Коэффициенты ω_q и μ уравнения (1.16), необходимые для построения области динамической неустойчивости по (1.19), определяются выражениями (1.17) и (1.18), в состав которых входят ω и $q_{кр}$. Для рассмотренных двух случаев изменения поперечных сечений двухшарнирной и бесшарнирной синусоидальных арок получены приближенные (в смысле метода Галеркина) выражения для частот основной кососимметричной формы собственных колебаний и критической нагрузки при кососимметричной форме потери статической устойчивости по двум полуволнам.

Ясно, что точность границ области динамической неустойчивости зависит от точности полученных выражений для коэффициентов частот и устойчивости, некоторые значения которых приведены в табл. 1 и 2. Однако, мы лишены возможности дать оценки точности полученных результатов, поскольку в литературе не имеется точных решений для задач о статической устойчивости и о свободных колебаниях синусоидальных арок. Поэтому представляет интерес сравнение найденных выше значений для коэффициентов частот (φ_{ic}) и устойчивости (K_{ic}) с аналогичными значениями для параболической арки, приведенными в работе [4]. Нужно сказать, что при одинаковых отношениях $f{:}l$ параболические арки, рассматриваемые в [4], и синусоидальные арки, рассматриваемые здесь как по очертанию оси, так и по законам изменения поперечных сечений мало отличаются друг от друга. Сравнение коэффициентов частот φ_i показывает, что они для обеих арок получаются очень близкими, что свидетельствует о достаточной для практических целей точности для значений φ_i, приведенных выше в табл. 1 и 2.

Что же касается коэффициентов статической устойчивости K_i, то для них можно провести только качественное сравнение, поскольку задача о параболической арке решена для равномерно распределенного давления q, а приведенные в табл. 1 и 2 значения K_i соответствуют синусоидальной нагрузке по (1.1). Если синусоидальную нагрузку (1.1) заменим равновеликой равномерно распределенной нагрузкой, то это приведет к умножению значений K_i, помещенных в табл. 1 и 2, на коэффициент $2{:}\pi = 0{,}637$. В табл. 3 даны сравнения пересчитанных таким образом значений коэффициентов K_i, при этом величины K_{ic} относятся к синусоидальной арке, а величины K_{in}, взятые из [4], — к параболической арке.

Из этой таблицы видно, что для бесшарнирной арки при всех отношениях $f{:}l$ имеют место неравенства $K_{3c} < K_{3n}$ и $K_{4c} < K_{4n}$. Это вполне понятно, поскольку интенсивность действующей нагрузки в середине пролета синусоидальной арки больше, чем на ее краях, по-

Таблица 3

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
K_{1c}	23,64	41,43	51,53	55,44	55,53	53,60	47,72	41,79
$K_{1п}$	29,53	49,42	58,27	59,80	—	54,08	46,35	39,70
K_{2c}	24,80	49,61	74,41	99,22	124,03	148,83	198,44	248,05
$K_{2п}$	30,86	58,36	81,99	103,06	—	142,14	180,52	219,27
K_{3c}	49,15	79,36	116,36	131,00	136,43	135,99	126,70	114,16
$K_{3п}$	62,14	111,02	141,38	155,60	—	155,73	141,65	125,71
K_{4c}	51,32	105,16	162,69	223,71	287,30	352,53	485,37	619,11
$K_{4п}$	65,59	135,69	212,06	293,91	—	467,21	645,32	824,07

этому для потери статической устойчивости этой арки требуется меньше суммарной нагрузки.

Для двухшарнирной арки при $f:l$ от 0,1 до 0,6 $K_{1c} < K_{1п}$ и $K_{2c} < K_{2п}$. Только при двух значениях $f:l = 0{,}8$ и $f:l = 1{,}0$ коэффициенты устойчивости параболической арки получаются несколько больше, чем приведенные коэффициенты синусоидальной арки, что объясняется большой подъемистостью арки.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 18 X 1963

Մ. Հ. Ալոյան

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՍԻՆՈՒՍԱԿԱՆ ԿԱՄԱՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է սինուսային առանցք և փոփոխական կտրվածք ունեցող կամարների դինամիկ կայունության խնդիրը։ Ստացված է խնդրի հիմնական (1.10) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի լուծումը Բուբնով-Գալյորկինի մոտավոր եղանակով բերվում է (1.12) դիֆերենցիալ հավասարմանը, իսկ վերջինս, կախված ազդող արտաքին, ժամանակի ընթացքում պարբերաբար փոփոխվող բեռից, բերվում է Մատյեի կամ Խիլլի դիֆերենցիալ հավասարումներին։

Երկհոդակապային և կոշտ ամրակցված ծայրերով կամարների, նրանց կտրվածքի փոփոխման երկու հիմնական դեպքերի համար որոշված են կրիտիկական ստատիկական բեռի մեծությունը, սեփական տատանումների հաճախականությունը, իսկ այնուհետև՝ Մատյեի դիֆերենցիալ հավասարման գործակիցները և տրված է դինամիկ անկայունության տիրույթը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
2. *Гильман Л. С.* К вопросу об устойчивости параболических арок, нагруженных

вертикальной равномерно распределенной нагрузкой. Известия Ленинградского политехнического института, 33, 1931.
3. *Джанелидзе Г. Ю.* Теоремы о разделении переменных в задачах о динамической устойчивости упругих систем. Труды Ленинградского института инженеров водного транспорта, вып. XX. М.—Л., 1953.
4. *Алоян М. А.* О динамической устойчивости параболической арки переменного поперечного сечения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 2, 1961.