

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. И. ГОЛЬДМАН

ДИРАКОВСКИЙ ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В в е д е н и е

Уравнение Дирака для электрона во внешнем поле допускает точное решение лишь в небольшом числе случаев, важнейшими среди которых являются: однородное постоянное магнитное поле, кулоново поле и поле плоской волны. Последнему случаю посвящено помимо оригинальной работы Волкова [1] еще несколько работ [2, 3, 4]. В [1] дано решение для монохроматической и набора монохроматических плоскополяризованных волн, полученное квадрированием уравнения Дирака. Тауб [2, 3] применил к той же задаче формальный прием зависящего от координат матричного „преобразования Лоренца“.

В § 1 дается решение уравнения Дирака для случая произвольной плоской электромагнитной волны, основанное на использовании проекционных матриц, что приводит к существенным упрощениям.

Важным для приложений вопросом является разделение решений на электронные и позитронные состояния. Очевидно, что для правильного решения этого вопроса совершенно недостаточно одного лишь требования, чтобы это разделение совпадало с обычным, когда поле отсутствует. Применение в некоторых работах (см. напр. [5])

для этой цели оператора $\Gamma = \frac{H \pm E}{2E}$, следовательно, является незаконным. В § 2 дано решение этого вопроса, основанное на рассмотрении ограниченного электромагнитного цуга.

В [6] плосковолновое решение используется для вычисления комптоновского рассеяния интенсивных потоков фотонов. При этом возникает вопрос об ортогональности системы решений уравнения Дирака. Доказательство ортогональности полученных решений приводится в § 3. Наконец, в § 4 рассмотрен случай монохроматической волны.

§ 1. Решение уравнения Дирака для электрона в поле
плоской волны

Рассмотрим произвольную плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении оси z и описываемую вектор-

-потенциалом $\vec{A}(z-t)$. Вектор $\vec{A}$ в силу поперечности имеет две компоненты в плоскости xu . Запишем уравнение для волновой функции электрона ψ

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad H = \vec{\alpha} [\vec{p} - e \vec{A}(z-t)] + \alpha_z \hat{p}_z + \beta m, \quad (1)$$

где $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ — матрицы Дирака и все векторы лежат в плоскости xu . Будем искать решение в виде

$$\psi = e^{i \vec{p} \cdot \vec{r} - i \lambda t} \chi(z-t). \quad (2)$$

Для χ получим уравнение

$$-i(1 - \alpha_z) \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = (\vec{\alpha} \vec{\pi} + \beta m - \lambda) \chi, \quad (3)$$

где

$$\vec{\pi}(\tau) = \vec{p} - e \vec{A}(\tau).$$

Введем в рассмотрение эрмитовы проекционные матрицы $a_{\pm} = \frac{1 \pm \alpha_z}{2}$. Их собственные значения — 0, 0, 1, 1, и они обладают следующими свойствами:

$$a_+^2 = a_+, \quad a_-^2 = a_-, \quad a_+ a_- = a_- a_+ = 0, \quad a_+ + a_- = 1; \\ a_+ \vec{\alpha} = \vec{\alpha} a_-, \quad a_+ \beta = \beta a_-. \quad (4)$$

Представим χ в виде

$$\chi = \chi_+ + \chi_-, \quad \chi_{\pm} = a_{\pm} \chi. \quad (5)$$

Тогда из (3) следует

$$-2i \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = (\vec{\alpha} \vec{\pi} + \beta m) \chi_+ - \lambda \chi_-, \quad (6)$$

$$0 = (\vec{\alpha} \vec{\pi} + \beta m) \chi_- - \lambda \chi_+. \quad (6a)$$

Исключив χ_+ , найдем уравнение для χ_-

$$-2i \frac{\partial \chi_-}{\partial \tau} = \frac{\vec{\pi}^2 + m^2 - \lambda^2}{\lambda} \chi_-, \quad (7)$$

решение которого имеет вид

$$\chi_-(\tau) = e^{iS(\tau)} \chi_0, \quad (8)$$

где

$$S(\tau) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\tau (\vec{\pi}^2 + m^2 - \lambda^2) d\tau, \quad (8a)$$

а χ_0 — постоянный биспинор, удовлетворяющий условию $a_+ \chi_0 = 0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -s_z \end{pmatrix} v, \quad (9)$$

где v — произвольный постоянный двухкомпонентный спинор.

Используя (5) и (6a), находим

$$\psi = \begin{pmatrix} \lambda + m + s_z s p \\ (m - \lambda) s_z + s p \end{pmatrix} v e^{iS(\tau) - i\epsilon - i p x - i p t - i p z}, \quad (10)$$

причем $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}(z - t)$, а $S(\tau)$ определяется из (8a). Уравнение (10) дает решение задачи о движении электрона в поле произвольной плоской волны.

§ 2. Физический анализ решения

Прежде всего необходимо выделить электронные и позитронные состояния. С этой целью предположим, что электромагнитная волна $\vec{A}$ представляет собой ограниченный пакет, то есть $\vec{A}(\tau)$ обращается в нуль при $\tau \rightarrow \pm \infty$. Тогда ψ с точностью до постоянного фазового множителя переходит в плоскую волну при $\tau \rightarrow \pm \infty$:

$$\psi \approx \begin{pmatrix} \lambda + m + s_z s p \\ (m - \lambda) s_z + s p \end{pmatrix} v e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i \left(\frac{\vec{p}^2 + m^2 - \lambda^2}{2\lambda} \right) z - i \left(\frac{\vec{p}^2 + m^2 + \lambda^2}{2\lambda} \right) t}. \quad (11)$$

Отсюда находим, что при $t \rightarrow \pm \infty$

$$p_z = \frac{\vec{p}^2 + m^2 - \lambda^2}{2\lambda}, \quad \epsilon = \frac{\vec{p}^2 + m^2 + \lambda^2}{2\lambda}, \quad \lambda = \epsilon - p_z, \quad (12)$$

и, как нетрудно проверить, автоматически выполняется соотношение $\epsilon^2 = p^2 + p_z^2 + m^2$. Поскольку знаки ϵ и λ совпадают, область изменений $\lambda \in [-\infty, 0]$ отвечает позитронному, а $[0, \infty]$ электронному состояниям. Может показаться неожиданным то обстоятельство, что ϵ и p_z до и после взаимодействия одинаковы, несмотря на воздействие поля, зависящего от z и t . Этот парадокс находит свое разрешение в том, что

работа электрического поля $\int \vec{E} dt = \vec{A}(+\infty) - \vec{A}(-\infty)$ при наших

предположениях ($\vec{A} \rightarrow 0$) обращается в нуль, а магнитное поле, как

известно, работы над зарядом не производит. Если пакет таков, что значения $\vec{A}$ на пределах разные, простые соотношения (12) не будут справедливы.

Перейдем теперь к рассмотрению состояний поляризации. Как известно [7], между двумя спинорами $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$ в плоской волне вы-

полняется соотношение $w' = \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{z + m} w$. Несложные выкладки показывают, что это соотношение выполняется и для верхнего и для нижнего спиноров, входящих в (11). Если $\vec{p} = 0$, то, выбрав в качестве w собственные функции σ_z , получим два ортогональных состояния:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (спин вдоль оси } z \text{)}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (спин против оси } z \text{)}.$$

Отметим, что поляризация после взаимодействия с плоской волной не меняется (это утверждение, однако, неточно, ввиду наличия у электрона радиационной добавки к магнитному моменту). Следует подчеркнуть также, что фазовый множитель в (10), набегающий за время действия пула, зависит от параметров плоской волны $(\vec{p}, \vec{\lambda})$.

Следует отметить, что если электрон до взаимодействия покоился, то в поле плоской волны он приобретает некоторую среднюю скорость. Это становится ясным, если вычислить плотность тока:

$$\vec{j} = \psi \vec{\alpha} \psi = \frac{2\lambda (\vec{p} - e\vec{A})}{m^2(1 + \xi^2) + \lambda^2 + \vec{p}^2}, \quad j_z = \frac{m^2 - \lambda^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2}{m^2(1 + \xi^2) + \lambda^2 + \vec{p}^2}. \quad (13)$$

Из этих выражений видно, что система координат, в которой электрон в среднем покоится ($\vec{j} = 0$), характеризуется $\vec{p} = 0$, $\lambda = m\sqrt{1 + \xi^2}$ и отлична от системы координат, где электрон покоился до взаимодействия ($\vec{p} = 0$, $\lambda = m$).

§ 3. Нормировка. Доказательство ортогональности

Для дальнейшего удобно перейти от непрерывного спектра к дискретному при помощи обычного приема, вводя условие периодичности на поверхностях куба с ребром L . В связи с этим предположим, что

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r} + L) \quad (14)$$

и потребуем, чтобы такому же условию периодичности удовлетворяла волновая функция электрона. Тогда

$$\vec{p} = \frac{2\pi n}{L}, \quad \frac{\vec{p}^2 + m^2(1 + \xi^2) - \lambda^2}{2\lambda} = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (15)$$

где $\vec{n}$, n_z — целые числа и введено обозначение

$$\xi^2 = \frac{e^2}{m^2 L} \int_0^L \vec{A}^2 dz = \frac{e^2}{m^2} \overline{A^2}, \quad (16)$$

а также предполагается, что

$$\int_0^L \vec{A} dz = 0. \quad (17)$$

Последнее условие (15) обеспечивает периодичность $S(z) = S(z + L)$. Очевидно, что параметр

$$\xi^2 = \frac{e^2}{m^2} \overline{A^2}, \quad A_\mu = 0, \quad (18)$$

где A_μ — четыре-потенциал плоской волны явно релятивистски инвариантен и, как мы покажем сейчас, не меняется при преобразовании калибровки. Действительно, для плоской волны A_μ зависит лишь от $n \cdot x$, где n характеризует направление распространения волны $n^2 = 0$.

При калибровочном преобразовании

$$A_\mu = A_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = A_\mu + n_\mu \varphi', \quad (19)$$

где $\varphi(n \cdot x)$ — скалярная функция. Отсюда находим, учитывая поперечность $n_\mu A_\mu = 0$, что параметр ξ не только релятивистски, но и калибровочно инвариантен.

Для того, чтобы доказать ортогональность ψ , рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int_0^L d\vec{r} \int_0^L dz \psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z, t) \psi_{\vec{p}'\lambda'}(\vec{r}, z, t). \quad (20)$$

Пользуясь периодичностью

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z + L, t), \quad (21)$$

можно изменить пределы интегрирования по z и записать $I(t)$ в виде*

$$I(t) = \int_0^L d\vec{r} \int_0^L dz \psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z + t, t) \psi_{\vec{p}'\lambda'}(\vec{r}, z + t, t). \quad (22)$$

* Мы не пишем спинорных индексов у ψ .

Введем обозначения

$$\psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z, t) = \varphi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z - t, t) = \varphi(\vec{r}, \tau, t) \quad (23)$$

и заметим, что φ подчиняется уравнению

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{H} \varphi, \quad (24)$$

где

$$\tilde{H} = i(1 - \alpha_z) \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\alpha} [\vec{p} - e \vec{A}(\tau)] + \beta m \quad (25)$$

— эрмитов оператор, не зависящий от времени с собственным значением λ . Согласно общим теоремам φ , относящиеся к различным собственным значениям $\tilde{H}$ и $\vec{p}$, образуют полную ортогональную систему функций в кубе L^3 . Тем самым доказано, что

$$I(t) = \int_0^L d\vec{r} \int_0^L d\tau \varphi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, \tau, t) \varphi_{\vec{p}\lambda'}(\vec{r}, \tau, t) = I(t) \delta_{\vec{p}\lambda}^{\vec{p}\lambda'}, \quad (26)$$

то есть ортогональность ψ в произвольный момент t . Так как φ зависит от t только через $e^{-i\lambda t}$, нормировочная постоянная не зависит от t . Замечая, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{p}\lambda}^+ \varphi_{\vec{p}\lambda} &= v^+ (m + \lambda + \vec{\sigma} \vec{\pi} \sigma_z, (m - \lambda) \sigma_z + \vec{\sigma} \vec{\pi}) \begin{pmatrix} m + \lambda + \sigma_z \vec{\sigma} \vec{\pi} \\ (m - \lambda) \sigma_z + \vec{\sigma} \vec{\pi} \end{pmatrix} v = \\ &= 2v^+ v (m^2 + \lambda^2 + \vec{\pi}^2), \end{aligned} \quad (27)$$

найдем, таким образом, нормировочную постоянную, которую надо ввести в ψ при условии $v^+ v = 1$:

$$c_{\vec{p}\lambda} = [2L^3 [m^2(1 + \frac{1}{2}) + \lambda^2 + \vec{p}^2]]^{-1/2}. \quad (28)$$

§ 4. Монохроматическая волна

Выделим в выражении (8а) для $S(\tau)$ член, монотонно зависящий от τ :

$$S(\tau) = \frac{\vec{p}^2 + m^2(1 + \frac{1}{2}) - i^2}{2\lambda} \tau - \frac{e\vec{p}}{\lambda} \int \vec{A}(\tau) d\tau + \frac{e^2}{2\lambda} \int (\vec{A}^2 - \vec{A}^2) d\tau. \quad (29)$$

Вектор-потенциал эллиптически поляризованной волны с частотой ω возьмем в виде

$$\begin{aligned}
 A_x &= -\frac{\sqrt{2}\xi m}{l} \sin \alpha \cos \omega \tau, \\
 A_y &= -\frac{\sqrt{2}\xi m}{l} \cos \alpha \cos (\omega \tau + \beta),
 \end{aligned}
 \quad (30)$$

причем $\tau = t - z$ и α, β — параметры, характеризующие поляризацию. Интегрирование в (29) дает теперь

$$\begin{aligned}
 S(\tau) &= \frac{\vec{p}^2 + m^2(1 + \xi^2) - \lambda^2}{2\lambda} \tau + \frac{\vec{p} \sqrt{2}\xi m \sin \alpha}{\lambda \omega} \sin \omega \tau + \\
 &+ \frac{\xi^2 m^2 \sin^2 \alpha}{4\lambda \omega} \sin 2\omega \tau + \frac{\xi^2 m^2 \cos^2 \alpha}{4\lambda \omega} \sin 2(\omega \tau + \beta).
 \end{aligned}
 \quad (31)$$

В частном случае $\alpha = \beta = 0$ получается результат [1] для плоскополяризованной волны.

Физический институт ГКАЭ
г. Ереван

Поступила 25 III 1964

Ի. Ի. ՎՈՎՈՅԱՆ

ԳԻՐԱԿՑԱՆ ԷԼԵԿՏՐՈՆԵՐ ՀԱՐՔ ԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԱՐԲԻ ԳԱՇՏՈՒՄ

Ա. Մ. Փ. Ն. Փ. Ն. Մ.

Հոգիածում արվում է Գիրակի համասարման պարզ լուծումը հարթ ալիքի դաշտում, հիմնված պրոչկեյնի մատրիցների օդատարժման վրա: Արված է էլեկտրոնային ու պոզիտրոնային վիճակների բաժանում և ցույց է տրված, որ էլեկտրոնի բեկոսացումը հարթ ալիքի փոխադրեցությունից հետո մնում է անփոփոխ: Լուծման ֆիզիկական առաջիկա հիմնված է էլեկտրամագնիսական ալիքի վերջնական ցույցի ուսումնասիրության վրա: Մանրամասնակ հարթ բեկոսացված ալիքի մասնավոր դեպքում լուծումը համընկնում է Վոլկովի հաշտի արդյունքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Volkov D. M. Eine neue Lösung der Diracsche Gleichung. Z. Phys., 94, 25, 1935.
2. Taub A. H. New approach to the solution of the Dirac equation. Rev. Mod. Phys., 21, 1949, 388.
3. Taub A. H. The movement of electron in electromagnetic field. Phys. Rev., 73, 1948, 786.
4. Sengupta N. D. On the solution of the equation of electron in the field of radiation. Bull. Calcutta Math. Soc., 39, 1947.
5. Reiss H. R. Absorption of light by light. J. Math. Phys., 59, 1962.
6. Гольдман И. И. Эффекты интенсивности в комптоновском рассеянии. ЖЭТФ, 46, вып. 4, 1964.
7. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Гостехиздат, М., 1959.