

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. М. АПВАЗЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

О ДИФРАКЦИИ ПОЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ
 ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ
 КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

В настоящей работе мы рассмотрим поля излучения заряженной частицы, движущейся неравномерно по оси полубесконечного круглого волновода.

Выберем ось z по оси волновода. Стенки волновода описываются уравнениями $r = a$, $z > 0$. Уравнения движения частицы зададим в виде $z = z(t)$.

Введем вектор Герца Π , через который поля определяются обычным образом [1]. Из симметрии задачи видно, что отлична от нуля только лишь компонента $\Pi_z = \Pi$. Полный вектор Герца Π^1 ищем в виде $\Pi^1 = \Pi^0 + \Pi$, где Π^0 — вектор Герца, описывающий поле неравномерно движущейся частицы в пустоте, а Π описывает добавочные поля, появляющиеся из-за наличия экрана. Вектор Герца Π^0 удовлетворяет неоднородному волновому уравнению $\square \Pi^0 = -4\pi \rho$, $j = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $j = eu(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z(t))$. Решая это уравнение и используя связь между полями и вектором Герца, для компоненты E_{z0} электрического поля получим следующее выражение:

$$E_{z0} = \frac{ie}{\pi} \int \frac{k^2 - \kappa^2}{\kappa} f_{\omega}(\kappa) K_0(\sqrt{\kappa^2 - k^2}r) e^{i\kappa z} d\kappa, \quad (1)$$

где

$$f_{\omega}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\kappa z(t) + i\omega t} dt, \quad k = \frac{|\omega|}{c}, \quad \text{Im } k > 0, \quad \text{Im}(\sqrt{\kappa^2 - k^2}) > 0.$$

Вектор Герца Π удовлетворяет однородному волновому уравнению и имеет вид [2]

$$\Pi_{\omega} = -\frac{2\pi^2 a}{\omega} \int \left\{ \begin{matrix} I_0(vr) H_0^1(va) \\ I_0(va) H_0^1(vr) \end{matrix} \right\} F(w) e^{i\omega z} dw, \quad (2)$$

где $v = \sqrt{k^2 - \omega^2}$, $\text{Im } v > 0$. (Верхнее выражение для $r < a$, а нижнее для $r > a$). Здесь $F(w)$ — неизвестная функция, которую мы можем определить с помощью граничного условия $E_z^1 = 0$ при $r = a$, $z > 0$

и условия отсутствия токов на продолжении стенок волновода, то есть при $r = a$, $z < 0$. С помощью этих условий получаем систему парных интегральных уравнений типа Винера-Хопфа

$$\begin{aligned} \pi a \int_0^\infty v^2 I_0(va) H_0^1(va) F(w) e^{i w z} dw = \\ = - \frac{i e \omega}{2 \pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 - k^2}{x} f_-(x) K_0(\sqrt{x^2 - k^2} a) e^{i x z} dx, \quad z > 0, \\ \int_{-\infty}^\infty F(w) e^{i w z} dw = 0, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая эту систему методом парных интегральных уравнений [2; 3], получаем

$$F(w) = \frac{i e \omega}{8 \pi^2 a} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{k^2 - x^2} \varphi_2(x) f_-(x) dx}{\sqrt{k^2 - w^2} \varphi_2(w) I_0(\sqrt{k^2 - w^2} a) (w - x)x}, \quad (4)$$

где $\varphi_2(x)$ — функция, голоморфная в нижней полуплоскости комплексного переменного x . Ее можно найти, например, в [2].

Рассмотрим поля внутри волновода $r < a$, $z > 0$. Подставляя (4) в (2) и интегрируя по w , получим Π_{-} . Для вектора Герца полного поля внутри волновода будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_{-}^1 = \frac{i e}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[K_0(\lambda r) - \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} I_0(\lambda r) \right] \frac{f_-(x)}{x} e^{i x z} dx + \\ + \frac{e}{2} \sum_m \frac{I_0(v_m r) H_0^1(v_m a) e^{i w_m z}}{\sqrt{k^2 - w_m^2} \varphi_2(w_m)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{k^2 - x^2} \varphi_2(x) f_-(x) dx}{x I_0(\lambda a) (w_m - x)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $w_m = \sqrt{k^2 - \frac{v_m^2}{a^2}}$, $v_m = \sqrt{k^2 - w_m^2}$, $\lambda = \sqrt{x^2 - k^2}$, а v_m есть корень уравнения $I_0(v_m) = 0$. Вектор Герца Π_{-} вне волновода имеет вид

$$\Pi_{-} = - \frac{2 \pi^2 a}{\omega} \int_0^\infty F(w) I_0(va) H_0^1(vr) e^{i w z} dw. \quad (6)$$

Заметим, что интегралы по x берутся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому аргументы функций Бесселя в этих интегралах могут быть действительными или мнимыми, смотря по тому $|x| > k$ или $|x| < k$. Это связано с тем, что поле неравномерно движущейся частицы состоит как бы из двух частей: поля, увлекаемого частицей и поля излучения из-за неравномерности движения. Первые поля падают экспоненциально с увеличением r , вторые падают как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, то есть как поля излучения. Поля излучения дифрагируют на открытом конце волновода, а поля, увлекаемые частицей, дифрагируют на открытом конце волновода и дают добавочное излучение. В случае равномер-

ного движения имеются только экспоненциально падающие поля, и излучение возникает только при пролете мимо открытого конца [1].

Первый член в (5) описывает поле неравномерно движущейся частицы в бесконечном круглом волноводе, а второй член есть вклад в поле от открытого конца. Функция $f_m(x)$ может иметь различные аналитические свойства по x . Если $f_m(x)$ не имеет разрывов в плоскости x , то вычеты в нулях функции Бесселя дают волны, распространяющиеся в бесконечном волноводе.

В случае, когда $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$, $|\omega| < \Omega$, где Ω — какое-то определенное значение частоты, неравномерно движущаяся частица в бесконечном волноводе не излучает, и излучение появляется лишь только из-за открытого конца. Для этого случая в пространстве вне волновода можно получить поля излучения на больших расстояниях от начала координат интегрированием по методу перевала.

$$\Pi_m = - \frac{e \cdot e^{ikR}}{2\pi R \sqrt{2k} \sin \frac{\theta}{2}} \int \frac{\sqrt{k^2 - x} I_0(ka \sin \theta) f_m(x) \varphi_0(x) dx}{(k \cos \theta - x) I_0(\sqrt{x^2 - k^2} a) \varphi_2(k \cos \theta) x}, \quad (7)$$

а спектральная плотность излучения вне волновода определяется отсюда по формуле

$$W_m = ck^4 \sin^2 \theta |\Pi|^2 R^2 d\Omega. \quad (8)$$

В случае, когда $f_m(x) \neq 0$ при $|x| \leq k$, положение несколько усложняется тем, что появляется необходимость учитывать излучения неравномерно движущейся частицы в пустоте.

Рассмотрим некоторые частные случаи движения частицы. В случае равномерного движения $f_m(x) = \delta(xu - \omega)$ интеграл по x сразу берется, и результаты переходят в результаты работы [1]. Заметим, что в этом случае всегда $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$.

В случае движущегося осциллятора $z(t) = ut + b \cos \omega_0 t$ функция $f_m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n I_n(xb) \delta(xu - \omega_0 n + \omega)$. Полный вектор Герца внутри волновода будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Pi_m = & \frac{ie}{\pi u} \sum_n \frac{(-i)^n I_n(x_n b)}{x_n} \left[K_0(\lambda_n r) - \frac{K_0(\lambda_n a)}{I_0(\lambda_n a)} I_0(\lambda_n r) \right] e^{ix_n z} + \\ & + \frac{e}{2u} \sum_{m,n} \frac{(-i)^n I_0(v_m r) H_0^1(v_m a) I_n(x_n b) \varphi_2(x_n) e^{i\omega_m z}}{\sqrt{k^2 - \omega_m^2} \varphi_2^*(\omega_m) I_0(\lambda_n a) (\omega_m - x_n) x_n}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda_n = \sqrt{x_n^2 - k^2}$, $x_n = \frac{\omega_0 n - \omega}{u}$.

Заметим, что в первом члене при мнимых λ_n имеются полюса в точках $\lambda_n a = \gamma_k$, то есть $x_n = \omega_k$. Это означает, что в бесконечном волноводе излучаются преимущественно лишь определенные частоты, которые легко находятся из этого условия. Во втором члене имеются

аналогичные особенности. При $I_m \omega \pi > 0$ волны, происходящие от второго члена, затухают вглубь волновода. Приведем еще выражение для вектора Герца Π_m в пространстве вне волновода для частот $|\omega| < \Omega = \frac{\omega_0}{1 + \beta}$. В этом случае $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$ и можно применить формулу (7)

$$\Pi_m = - \frac{e \cdot e^{ikR}}{2\pi R \sqrt{2k \sin \frac{\theta}{2}}} \sum_n \frac{(-i)^n \sqrt{k - x_n} I_0(ka \sin \theta) I_n(x_n b) \varphi_2(x_n)}{(k \cos \theta - x_n) I_0(\lambda_n a) x_n u \varphi_2(k \cos \theta)} \quad (10)$$

Излучение во все открытое пространство для частот $\omega < \Omega$ определяется выражением

$$W_m = \frac{ek^2}{2\pi u^2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta I_0^2(ka \sin \theta)}{|\varphi_2(k \cos \theta)|^2 (1 - \cos \theta)} \times \\ \times \left| \sum_n (-i)^n \frac{\sqrt{k - x_n} I_n(x_n b) \varphi_2(x_n)}{(k \cos \theta - x_n) I_0(\lambda_n a) x_n} \right|^2 d\theta \quad (11)$$

Заметим, что при $b \rightarrow 0$ все члены суммы при $n \neq 0$ стремятся к нулю из-за множителя $I_n(x_n b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$ и $n \neq 0$. Тогда вместо x_n нужно поставить $x_0 = \frac{\omega}{u}$, следовательно, требование, что $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$, выполняется для всех частот, и формула (11) переходит в формулу излучения равномерно движущейся частицы.

Член с $n = 0$ в формуле (11) дает основной вклад в излучение и с точностью до множителя $I_0^2\left(\frac{\omega}{u} b\right)$ совпадает с формулой для излучения равномерно движущейся частицы. С ростом номера n по модулю все члены суммы (11) начинают экспоненциально падать.

Физико-техническая лаборатория

АН Армянской ССР

Поступила 19 III 1964

ՅՈՒ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԼՐԱԿՅԱՆ.

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԶՈՒՓ ՇԱՐՃՎՈՂ ԼԻՑԷԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ԴԱՇՏԻ
ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆԻ ԿՈՍԱՆՎԵՐՁ ԴԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՏԱՐԻ ՎՐԱ

Ա մ ֆ ո լ ո թ ի մ

Հողմածուրդ դիտարկված է անհավասարաչափ շարժվող լիցքավորված մասնիկի դաշտի դիֆրակցիան կիսաանվերջ զլանային ալիքատարի վրա: Ստացված են արտահայտություններ դաշտերի համար ալիքատարի ներսում և ազատ տարածության մեջ: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր՝ հավասարաչափ շարժվող մասնիկի դեպքում և հավասարաչափ շարժվող օսցիլլատորի դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение точечной заряженной частицы, пролетающей по оси полубесконечного круглого волновода. ЖТФ. 34, вып. 4, 1964, 711.
2. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Советское радио, М., 1953.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. ИЛ, М., 1962.