

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Е. С. СИНАЙСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА,  
 ИМЕЮЩЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Связь между изображениями преобразованных по Лапласу ядра  $K(t)$  и резольвенты  $R(t)$  уравнения Вольтерра второго рода с разностным ядром имеет вид

$$\frac{1}{1-\bar{K}} = 1 + R, \quad (1.1)$$

где черточками отмечены изображения соответствующих функций. Если изображение резольвенты удастся разложить в сходящийся при  $\operatorname{Re} p > s_0 > 0$  ряд по обратным степеням операционной переменной  $p$

$$\bar{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}, \quad (1.2)$$

то сама резольвента представится рядом

$$R(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (t-\tau)^n}{(n+1)!}. \quad (1.3)$$

Выражения (1.2) и (1.3) составляют содержание тождества Вольтерра в операционной форме [1] (стр. 122).

Если в качестве ядра  $K(t-\tau)$  взять функцию Абеля

$$I_\alpha = \lambda \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (\alpha > -1), \quad (1.4)$$

то резольвента получается [2] в виде

$$R(\lambda; t-\tau) = \lambda \mathcal{E}_\alpha(\lambda; t-\tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (t-\tau)^{(n+1)\alpha+1}}{\Gamma[(n+1)(\alpha+1)]}. \quad (1.5)$$

Функция Ю. Н. Работнова  $\mathcal{E}_\alpha(\lambda; t-\tau)$  [3] в теории наследственной упругости выбирается в качестве ядра наследственности.

Соответствующий подбор параметров по опытным кривым позволяет с ее помощью хорошо описывать процессы деформирования упруго-наследственных систем. Выведенные в работах [3-5] свойства оператора  $\mathcal{E}_\alpha(\lambda)$  дают возможность эффективно решать большое число задач теории наследственной упругости.

Благодаря специальному виду оператора  $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$

$$\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) f(t) = \int_0^t \mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

при его воздействии на интегрируемую функцию  $f(t)$  и ввиду простоты изображения функции  $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t)$ :

$$\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p) = \frac{1}{p^{\alpha+1} - \lambda} \quad (1.7)$$

свойства операторов  $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$  можно перевести на язык операционного исчисления. Все теоремы для операторов  $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$ , переформулированные для изображений  $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p)$ , выглядят конструктивно так же. Приведем основные из них

$$\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p) \mathfrak{A}_\gamma(\mu; p) = \frac{\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p) - \mathfrak{A}_\alpha(\mu; p)}{\lambda - \mu}, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{1 - \alpha \mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p)} = 1 + \alpha \mathfrak{A}_\alpha(\lambda + \alpha; p), \quad (1.9)$$

$$\mathfrak{A}_\alpha^n(\lambda; p) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} \mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p). \quad (1.10)$$

Выражения (1.7)–(1.10) позволяют линейные статические (без учета инерционных сил) задачи теории наследственной упругости с ядром наследственности вида  $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t - \tau)$  эффективно решать также и операционным методом. Кроме того, знание изображения функции  $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t)$  согласно (1.7) дает возможность получить новые свойства интегральных операторов  $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$ . Так, ниже будет получено выражение произведения  $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) \mathfrak{A}_\gamma^*(\mu)$ , когда  $\alpha \neq \gamma$ , при его воздействии на степенную функцию.

§ 2. Преобразованное по Лапласу выражение  $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) \mathfrak{A}_\gamma^*(\mu) t^k$  имеет вид

$$L[\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) \mathfrak{A}_\gamma^*(\mu) t^k] = \frac{\Gamma(1+\delta)}{(p^{\alpha+1} - \lambda)(p^{\gamma+1} - \mu) p^{1+\delta}}, \quad (2.1)$$

где  $L$  — оператор преобразования Лапласа.

Пусть  $\alpha + 1 = \frac{a}{c}$  и  $\gamma + 1 = \frac{m}{n}$  — несократимые дроби меньше единицы, а числа  $a, c, m, n$  — целые. Правую часть (2.1) с помощью подстановки  $p = z^{cn}$  можно представить конечными суммами вида:

$$\sum_{k=1}^{k=an} \frac{A_k \Gamma(1+\delta) p^{\frac{a}{c} - \frac{k}{cn} - 1 - \delta}}{p^{\frac{a}{c} - \delta}} + \sum_{l=1}^{l=cm} \frac{B_l \Gamma(1+\delta) p^{\frac{m}{n} - \frac{l}{cn} - 1 - \delta}}{p^{\frac{m}{n} - \delta}} =$$

$$= \Xi_a(\lambda; p) \Gamma(1+\delta) \sum_{k=1}^{an} A_k p^{\frac{a}{c} - \frac{k}{cn} - 1 - \delta} + \Xi_b(p; p) \Gamma(1+\delta) \sum_{s=1}^{cm} B_s p^{\frac{m}{n} - \frac{s}{cn} - 1 - \delta} \quad (2.2)$$

Постоянные  $A_k$  и  $B_s$  определяются методом неопределенных коэффициентов.

Возвращаясь к оригиналам, получим для любого  $\delta > 0$  и для  $\delta < 0$  при  $\delta + 1 > \max \left\{ \frac{a}{c} - \frac{1}{cn}, \frac{m}{n} - \frac{1}{cn} \right\}$

$$\begin{aligned} \Xi_a^*(\lambda) \Xi_b^*(p) t^k &= \sum_{k=1}^{an} A_k \Xi_a^*(\lambda) \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma\left(-\frac{a}{c} + \frac{k}{cn} + 1 + \delta\right)} t^{k - \frac{a}{c} + \frac{k}{cn}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{cm} B_s \Xi_b^*(p) \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma\left(-\frac{m}{n} + \frac{s}{cn} + 1 + \delta\right)} t^{k - \frac{m}{n} + \frac{s}{cn}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При  $a = \gamma$  (2.3) переходит в формулу Ю. Н. Работнова [3]. Непосредственное вычисление по формуле (2.3) затруднительно ввиду медленной сходимости ряда (1.5). Поэтому для больших значений  $t$  удобнее пользоваться соответствующей аппроксимацией. Представляя изображение  $\Xi_a^*(\lambda) t^k$  в виде

$$\frac{\Gamma(1+\delta)}{p^{1+\delta}(p^r - \lambda)} = -\Gamma(1+\delta) \sum_{n=0}^N \lambda^{-n-1} p^{r(n-1)} + r_N(p), \quad (2.4)$$

по теореме 11 работы [6] (стр. 218) получаем при  $0 < r = 1 + \alpha < 1$  и любом  $\lambda$  (в общем случае комплекснозначном)

$$\Xi_a^*(\lambda) t^k = - \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(1+\delta)}{\lambda^{n+1} \Gamma(1+\delta - nr)} t^{k-nr} + \text{Res} \frac{\Gamma(1+\delta) e^{pt}}{p^{1+\delta}(p^r - \lambda)} + r_N(t), \quad (2.5)$$

где вычет вычисляется в полюсе  $p = \lambda^{\frac{1}{r}}$  при  $|\arg \lambda| < \pi r$  и отсутствует в противном случае.

При  $\lambda < 0$  первый член суммы в выражении (2.5) совпадает с аппроксимацией автора [7], а аппроксимация, полученная в работе [8], есть частный случай (2.5) при  $\delta = 0$ .

Оценка остаточного члена методами работы [6] дает

$$|r_N(t)| \leq \frac{\Gamma(1+\delta) \Gamma(rn + r - \delta)}{\pi c |\lambda|^{N+1}} t^{-rn-r+\delta}, \quad (2.6)$$

$$\text{где } c = \begin{cases} |\lambda| \sin \phi & \text{при } 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \\ |\lambda| & \text{при } \phi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

а  $\phi = |\pi r - \arg \lambda|$ .

§ 3. Решение ряда задач теории наследственной упругости со сложными реологическими свойствами связано с нахождением резольвенты ядра вида

$$K = a_1 \mathfrak{D}_\lambda(\lambda; t - \tau) + a_2 \mathfrak{D}_\mu(\mu; t - \tau). \quad (3.1)$$

Согласно (1.1) изображение резольвенты ядра (3.1) представится так

$$\bar{R} = \frac{a_1(p^{\gamma+1} - \mu) + a_2(p^{\alpha+1} - \lambda)}{(p^{\alpha+1} - \lambda)(p^{\gamma+1} - \mu) - a_1(p^{\gamma+1} - \mu) - a_2(p^{\alpha+1} - \lambda)}. \quad (3.2)$$

Полагая, как и раньше, что  $\alpha + 1 = \frac{a}{c}$ ,  $\gamma + 1 = \frac{m}{n}$  — несократимые

дроби, можно рационализировать выражение (3.2) подстановкой  $p = z^{cn}$ . Однако, разложение на множители получившегося в знаменателе многочлена высокой степени затруднительно. Приблизительные значения параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , определяемые в результате обработки опытных кривых ползучести, позволяют обходиться многочленами не выше пятой степени в случае, когда  $\alpha + 1$  в 1,5; 2; 3 и 4 раза больше, чем  $\gamma + 1$ . Представив изображение резольвенты (3.2) суммой простых дробей, можно с помощью (1.7) перейти к оригиналам.

§ 4. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о прогибе свободно опертой по контуру трехслойной изотропной пластинки со слоями одинаковой толщины, равной  $\frac{h}{3}$ , обладающими наследствен-

ной упругостью, причем к среднему слою из одного материала прижимают два одинаковых слоя из другого материала. Жесткость  $D$  такой пластинки по книге С. Г. Лехницкого [9] (стр. 265) имеет вид

$$D = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{3} \right)^3 \left( \frac{26 E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \right), \quad (4.1)$$

где  $E_1$ ,  $\nu_1$  и  $E_2$ ,  $\nu_2$  — упругие постоянные соответственно внешних и внутреннего слоев.

По принципу Вольтерра-Работнова [3] прогиб такой пластинки получим заменой в решении соответствующей упругой задачи [10] (стр. 119) жесткости при изгибе  $D$  оператором

$$D_t = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{3} \right)^3 \left\{ \frac{26 E_{01}}{1 - \nu_1^2} [1 - \chi_1 \mathfrak{D}_\lambda^*(\beta_1)] + \frac{E_{02}}{1 - \nu_2^2} [1 - \chi_2 \mathfrak{D}_\mu^*(\beta_2)] \right\}, \quad (4.2)$$

где  $E_{01}$  и  $E_{02}$  — упругие модули в начальный момент при  $t = 0$ .

Хотя коэффициенты Пуассона  $\nu_1$  и  $\nu_2$  меняются со временем, квадраты их величины достаточно малы, чтобы с небольшой погрешностью можно было принять в качестве  $\nu_1$  и  $\nu_2$  некоторые средние их значения.

Величина прогиба рассматриваемой пластинки имеет вид

$$w = \frac{12 Q(x, y)}{\left( \frac{h}{3} \right)^3 a_0 [1 - a_1 \mathfrak{D}_\lambda^*(\beta_1) - a_2 \mathfrak{D}_\mu^*(\beta_2)]}, \quad (4.3)$$

где

$$a_0 = \frac{26 E_{01}}{1 - \gamma_1^2} + \frac{E_{02}}{1 - \gamma_2^2}, \quad a_1 = \frac{26 \gamma_1 E_{01}}{(1 - \gamma_1^2) a_0}, \quad a_2 = \frac{\gamma_2 E_{02}}{(1 - \gamma_2^2) a_0},$$

$Q(x, y)$  — величина, зависящая от размеров и формы пластинки, от величины и распределения нагрузки и независящая от свойств материала пластинки.

Обращение выражения  $\frac{1}{1 - a_1 \mathfrak{D}_x^*(\beta_1) - a_2 \mathfrak{D}_1^*(\beta_2)}$  согласно [4] сводится к нахождению резольвенты  $R$  ядра  $K = a_1 \mathfrak{D}_x(\beta_1; t - \tau) + a_2 \mathfrak{D}_1(\beta_2; t - \tau)$ . Изображение резольвенты для этого случая имеет вид (3.2).

Рассмотрим числовой пример для пластинки, которая находится при комнатной температуре и имеет внутренний слой медный, а наружные из алюминия. Обработывая опытные данные, приведенные в работе [11], получим для алюминия и меди соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,4, \quad \beta_1 = 0,11 (\text{час})^{-0,6}, \quad \gamma_1 = 0,097 (\text{час})^{-0,6}, \\ \gamma_1 &= 0,4, \quad E_{01} = 6,76 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \\ \gamma &= -0,7, \quad \beta_2 = -0,45 (\text{час})^{-0,3}, \quad \gamma_2 = 0,36 (\text{час})^{-0,3}, \\ \gamma_2 &= 0,38, \quad E_{02} = 10,2 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2. \end{aligned}$$

Тогда  $a_1 = 0,091$ ,  $a_2 = 0,0203$ ,

$$\begin{aligned} R &= \frac{0,0203 p^{0,6} + 0,091 p^{0,3} + 0,0432}{p^{0,9} + 0,43 p^{0,6} + 0,019 p^{0,3} + 0,0063} = \frac{0,045}{p^{0,3} + 0,421} + \\ &+ \frac{-0,063 + 0,4125i}{p^{0,3} + 0,0045 + 0,1233i} - \frac{0,063 + 0,4125i}{p^{0,3} + 0,0045 - 0,1233i}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Переходя к оригиналам по формуле (1.7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - a_1 \mathfrak{D}_x^*(\beta_1) - a_2 \mathfrak{D}_1^*(\beta_2)} &= 1 + 0,45 \mathfrak{D}_{-0,7}^*(-0,421) + (-0,063 + 0,4125i) \times \\ &\times \mathfrak{D}_{-0,7}^*(-0,0045 - 0,1233i) + (-0,063 - 0,4125i) \times \\ &\times \mathfrak{D}_{-0,7}^*(-0,0045 + 0,1233i). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.3) и используя аппроксимацию (2.5) при  $\beta = 0$ ,  $t = 1000 \text{ час}$ ,  $N = 3$ , получим

$$w = \frac{12Q(x, y)}{a_0 \left(\frac{h}{3}\right)^3} (1 + 2,516).$$

Итак, величина прогиба рассматриваемой пластинки с учетом наследственных свойств в 3,5 раза превосходит прогиб, образованный за 1000 час, с учетом только упругих свойств материала пластинки.

В заключение благодарю М. И. Розовского за ценные советы и обсуждение работы.

Է. Ս. ՍԻՆԱՅՍԿԻ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ՀԱՏՈՒԿ  
ՈՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ կապալի ինտեգրալ ձևափոխման հիման վրա ստացված են Յու. Ն. Ռարտենովի  $\Theta_2(\lambda; t - \tau)$  կորիզով ինտեգրալ օպերատորների նոր հատկություններ, որոնք թույլ են տալիս լուծել ժառանգական առաձգականության տեսության ինգիբրներ, երբ որպես սողքի կորիզ ընտրվում է  $\alpha, \beta, \gamma$  տարրեր պարամետրերով  $\Theta_2(\lambda; t - \tau)$  ֆունկցիաների դուժարից կազմված մի արտահայտություն: Որոշված է ժառանգական հատկություններ ունեցող եռաչերտ սալի ճկվածքը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, ч. I. Линейные уравнения Вольтерра. ГТИ, Л.—М., 1934.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
3. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 12, в. I, 1948.
4. Розовский М. И. Об одном классе функций и их приложениях. Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 2, № 1, 1962.
5. Розовский М. И. Об одном свойстве степени специального оператора и его приложении к решению упруго-наследственных динамических задач. Сборн. Ползучесть и длительная прочность. Труды всесоюзн. совещ. 1963 г. С. о. АН СССР, Новосибирск.
6. Фуке Б. А. и Левин В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
7. Брызгалов Г. И. К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластиков. Прикл. мех. и техн. физика, № 4, 1963.
8. Аннин Б. Д. Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка. ПММ, 25, в. 4, 1961.
9. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М.—Л., 1957.
10. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
11. Ровинский Б. М. и Лютица В. Г. Коэффициент Пуассона при релаксации напряжений. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1953.