ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 6, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

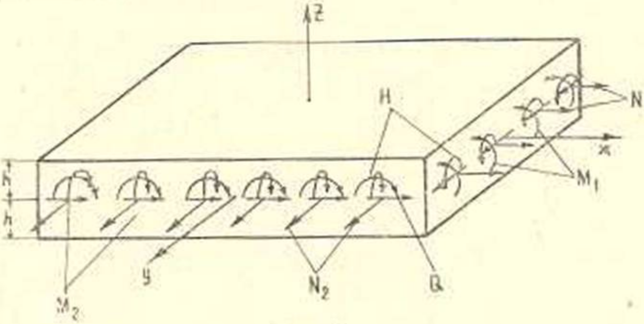
М. А. ЗАДОЯН

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

В статье исследуются задачи о предельном состоянии прямоугольной плиты и толстостенной цилиндрической оболочки.

В рассматриваемых задачах материал полагается жестко-пластическим и подчиняется законам теории идеально-пластического течения с условием Губера-Мизеса [1—4]. Для решения этих задач использованы результаты, полученные в статьях [5—6].

§ 1. Совместный изгиб, растяжение и кручение прямоугольной плиты. Обычная теория пластического изгиба плит основана на гипотезе Кирхгофа-Лява [1, 2, 7] и др. Не пользуясь указанной гипотезой, рассмотрим предельное состояние прямоугольной плиты, вызванное изгибающими моментами M_1, M_2, растягивающими силами N_1, N_2, крутящим моментом H и касательными силами Q, приложенными на торцах плиты, фиг. 1.



Фиг. 1.

Принимая в решении, приведенном в [5], некоторые произвольные постоянные равными нулю, получим:

для компонентов напряжений —

$$\sigma_x = \frac{k(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}}, \qquad \sigma_y = \frac{k(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}}, \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy} = \frac{k\gamma_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}}, \qquad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

где

$$\varepsilon_x = A_0 + A_1 z, \quad \varepsilon_y = B_0 + B_1 z, \quad \gamma_{xy} = C_0 + C_1 z; \tag{1.2}$$

для компонентов скорости перемещения —

$$u = A_1xz + C_1yz + A_0x + D_0y,$$
$$v = C_1xz + B_1yz + (2C_0 - D_0)x + B_0y, \tag{1.3}$$
$$w = -\frac{A_1}{2}x^2 - \frac{B_1}{2}y^2 - \frac{A_1+B_1}{2}z^2 - C_1xy - (A_0+B_0)z.$$

Как в этом, так и в следующем параграфе точки — символы производных опущены. Так что $A_1, B_1, \cdots$, будучи произвольными постоянными по отношению к x, y и z, могут зависеть от времени или от аналогичного параметра.

Принимая, например, $A_1 \neq 0$, компоненты напряжения можем представить в виде

$$\sigma_x = \frac{k[2a_0 + b_0 + (2+b_1)z]}{\sqrt{\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma}}, \qquad \sigma_y = \frac{k[a_0 + 2b_0 + (1+2b_1)z]}{\sqrt{\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma}},$$
$$\tau_{xy} = \frac{k(c_0 + c_1 z)}{\sqrt{\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma}}, \qquad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \tag{1.4}$$

где обозначены $A_0 = a_0A_1$, $B_0 = b_0A_1$, $B_1 = b_1A_1$, $C_0 = c_0A_1$, $C_1 = c_1A_1$,

$$\alpha = 1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2,$$
$$\beta = a_0 + b_0b_1 + c_0c_1 + \frac{1}{2}(a_0b_1 + b_0), \tag{1.5}$$
$$\gamma = a_0^2 + a_0b_0 + b_0^2 + c_0^2.$$

Имеем следующие граничные условия:

$$\int_{-h}^{h}\sigma_x dz = N_1, \quad \int_{-h}^{h}\sigma_y dz = N_2, \quad \int_{-h}^{h}\tau_{xy} dz = Q,$$
$$\int_{-h}^{h}\sigma_x z dz = M_1, \quad \int_{-h}^{h}\sigma_y z dz = M_2, \quad \int_{-h}^{h}\tau_{xy} z dz = H. \tag{1.6}$$

Подставляя σ_x, σ_y и τ_{xy} из (1.4) в (1.6) и вводя обозначения

$$I_i = \int_{-h}^{h}\frac{z^i dz}{\sqrt{\alpha z^2 + 2\beta z + \gamma}}, \qquad i = 0, 1, 2, \tag{1.7}$$

находим

$$\frac{N_1}{k} = (2a_0 + b_0)I_0 + (2 + b_1)I_1,$$
$$\frac{N_2}{k} = (a_0 + 2b_0)I_0 + (1 + 2b_1)I_1, \tag{1.8}$$

$$\frac{M_1}{k} = (2a_0 + b_0) I_1 + (2 + b_1) I_2,$$

$$\frac{M_2}{k} = (a_0 + 2b_0) I_1 + (1 + 2b_1) I_2, \tag{1.9}$$

$$\frac{Q}{k} = c_0 I_0 + c_1 I_1, \qquad \frac{H}{k} = c_0 I_1 + c_1 I_2. \tag{1.10}$$

Полученная система из шести нелинейных алгебраических уравнений содержит пять неизвестных постоянных. Шестое уравнение устанавливает соотношение между внешними силами, при котором наступает предельное состояние плиты. Из этих неизвестных постоянных три можно легко исключить. Определяя значения I_0 и I_1 из (1.8), а также I_1 и I_2 из (1.9), получим

$$I_0 = \frac{2N_2 - N_1 - b_1 (2N_1 - N_2)}{3k (b_0 - a_0 b_1)}, \tag{1.11}$$

$$I_1 = \frac{b_0 (2N_1 - N_2) - a_0 (2N_2 - N_1)}{3k (b_0 - a_0 b_1)}, \tag{1.12}$$

$$I_1 = \frac{2M_2 - M_1 - b_1 (2M_1 - M_2)}{3k (b_0 - a_0 b_1)}, \tag{1.13}$$

$$I_2 = \frac{b_0 (2M_1 - M_2) - a_0 (2M_2 - M_1)}{3k (b_0 - a_0 b_1)}, \tag{1.14}$$

причем предположено $b_0 - a_0 b_1 \neq 0$. Приравнивая правые части (1.12) и (1.13), будем иметь

$$b_1 = \frac{2M_2 - M_1}{2M_1 - M_2} + \frac{2N_2 - N_1}{2N_1 - N_2} a_0 - \frac{2N_1 - N_2}{2M_1 - M_2} b_0. \tag{1.15}$$

Подставляя значение b_1 из (1.15) в (1.11), (1.12) и (1.14), находим

$$I_0 = \frac{3 (M_1 N_2 - M_2 N_1) + (2N_1 - N_2) [N_1 (a_0 + 2b_0) - N_2 (2a_0 + b_0)]}{3k [(M_1 + a_0 N_1)(a_0 + 2b_0) - (M_2 + a_0 N_2)(2a_0 + b_0)]}, \tag{1.16}$$

$$I_1 = \frac{(2M_1 - M_2) [N_1 (a_0 + 2b_0) - N_2 (2a_0 + b_0)]}{3k [(M_1 + a_0 N_1)(a_0 + 2b_0) - (M_2 + a_0 N_2)(2a_0 + b_0)]}, \tag{1.17}$$

$$I_2 = \frac{(2M_2 - M_1) [M_1 (a_0 + 2b_0) - M_2 (2a_0 + b_0)]}{3k [(M_1 + a_0 N_1)(a_0 + 2b_0) - (M_2 + a_0 N_2)(2a_0 + b_0)]}. \tag{1.18}$$

В выражения для I_0, I_1 и I_2 входят две произвольные постоянные a_0 и b_0, поэтому выражение для b_1, определяемое по (1.15), а также следуемые из (1.10) выражения для c_0 и c_1:

$$c_0 = \frac{HI_1 - QI_2}{k (I_1^2 - I_0 I_2)}, \qquad c_1 = -\frac{HI_0 - QI_1}{k (I_1^2 - I_0 I_2)}, \tag{1.19}$$

также будут зависеть только от a_0 и b_0.

Вычисляя значения интегралов (1.7), получим

$$I_0=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha h^2+2\beta h+\gamma}+\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha h^2-2\beta h+\gamma}-\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}, \tag{1.20}$$

$$I_1=\frac{\sqrt{\alpha h^2+2\beta h+\gamma}-\sqrt{\alpha h^2-2\beta h+\gamma}}{\alpha}-$$

$$-\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha h^2+2\beta h+\gamma}+\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha h^2-2\beta h+\gamma}-\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}, \tag{1.21}$$

$$I_2=\frac{\alpha h-3\beta}{2\alpha^2}\sqrt{\alpha h^2+2\beta h+\gamma}+\frac{\alpha h+3\beta}{2\alpha^2}\sqrt{\alpha h^2-2\beta h+\gamma}+$$

$$+\frac{3\beta^2-\alpha\gamma}{2\alpha^2\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha h^2+2\beta h+\gamma}+\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha h^2-2\beta h+\gamma}-\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}. \tag{1.22}$$

Далее, делая для упрощения некоторые преобразования, будем иметь

$$\frac{\sqrt{\alpha h^2+2\beta h+\gamma}+\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha h^2-2\beta h+\gamma}-\sqrt{\alpha}\,h+\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}=e^{\sqrt{\alpha}\,I_0}, \tag{1.23}$$

$$\{(\gamma+\beta h)I_0+(3\beta+\alpha h)I_1+2\alpha I_2\}^2+$$

$$+\{(\gamma-\beta h)I_0+(3\beta-\alpha h)I_1+2\alpha I_2\}^2=8h^2(\alpha h^2+\gamma), \tag{1.24}$$

$$\{(\gamma+\beta h)I_0+(3\beta+\alpha h)I_1+2\alpha I_2\}^2-$$

$$-\{(\gamma-\beta h)I_0+(3\beta-\alpha h)I_1+2\alpha I_2\}^2=16h^3\beta. \tag{1.25}$$

Два уравнения из системы (1.23)—(1.25), где I_0, I_1, I_2 даются формулами (1.16)—(1.18), определяют неизвестные постоянные a_0 и b_0, а третье уравнение устанавливает соотношение между внешними силами.

Считая, что значения a_0 и b_0 тем или иным приближенным способом определены, напишем выражения компонентов скорости перемещения (1.3) в виде

$$\frac{u}{A_1}=xz+c_1yz+a_0x+d_0y,$$

$$\frac{v}{A_1}=c_1xz+b_1yz+(2c_0-d_0)x+b_0y, \tag{1.26}$$

$$-\frac{2w}{A_1} = x^2 + b_1 y^2 + (1 + b_1) z^2 + 2c_1 xy + 2(a_0 + b_0) z.$$

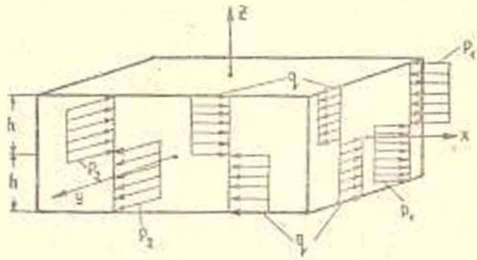
Очевидно, что для определения A_1 и d_0 требуются данные относительно скоростей перемещений.

Рассмотрим теперь более простой случай, когда толстая прямоугольная плита подвергается только изгибу и кручению. Положим, что на торцах плиты соответственно приложены нормальные напряжения $\varkappa p_1$, $\varkappa p_2$ и касательные напряжения $\varkappa q$ (фиг. 2), где $\varkappa = \operatorname{sign} z$. Тогда, полагая в (1.4) $a_0 = b_0 = c_0 = 0$, получим

$$\sigma_x = \frac{\varkappa k (2 + b_1)}{\sqrt{1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2}}, \qquad \sigma_y = \frac{\varkappa k (1 + 2b_1)}{\sqrt{1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2}},$$
$$\tau_{xy} = \frac{\varkappa k c_1}{\sqrt{1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2}}, \qquad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \tag{1.27}$$

Определяя неизвестные b_1 и c_1 из краевых условий

$$b_1 = \frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2}, \quad c_1 = \frac{3q}{2p_1 - p_2}, \tag{1.28}$$



Фиг. 2

причем $2p_1 - p_2 \neq 0$, поскольку $A_1 \neq 0$, находим компоненты напряжения в плите

$$\sigma_x = \varkappa p_1, \quad \sigma_y = \varkappa p_2, \quad \tau_{xy} = \varkappa q,$$
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{1.29}$$

и зависимость между p_1, p_2 и q

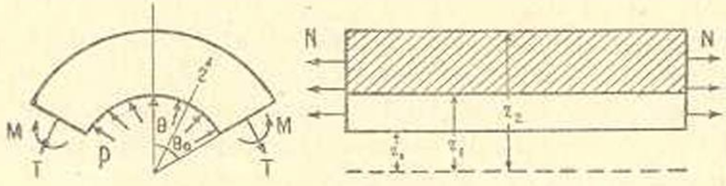
$$p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + 3q^2 = 3k^2. \tag{1.30}$$

Компоненты скорости перемещений в этом случае будут

$$\frac{u}{A_1} = xz + \frac{3q}{2p_1 - p_2} yz + d_0 y,$$
$$\frac{v}{A_1} = \frac{3q}{2p_1 - p_2} xz + \frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2} yz - d_0 x, \tag{1.31}$$
$$-\frac{2w}{A_1} = x^2 + \frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2} y^2 + \frac{p_1 + p_2}{2p_1 - p_2} z^2 + \frac{3q}{2p_1 - p_2} xy.$$

На фиг. 2 показан тот случай, когда p_1 и p_2 имеют одинаковые знаки, однако, полученные формулы верны и для $p_1 p_2 < 0$.

§ 2. Об одной задаче предельного состояния толстостенной цилиндрической оболочки. Пусть толстостенная цилиндрическая оболочка из несжимаемого идеально жестко-пластического материала находится под совместным действием приложенных на боковых сечениях $\theta = \pm\theta_0$ изгибающих моментов и растягивающих сил с интенсивностями M и T, а также внутреннего давления P и продольных сил $2N\theta_0$, действующих на концевых сечениях $z = \pm l$ (фиг. 3). При этом, очевидно, $T = Pr_1$.



Фиг. 3.

Аналогичная плоская задача, когда отсутствуют продольные деформации, исследована Р. Хиллом [3].

Для решения поставленной задачи используем выражения компонентов напряжения и скорости перемещения, полученные в [6]. Принимая в этих выражениях некоторые постоянные равными нулю, будем иметь

$$\sigma_r = -D + \int\limits_{r_1}^{r} \frac{k\,(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)}{\sqrt{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\,\varepsilon_z + \varepsilon_z^2}} \frac{dr}{r}, \qquad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{k\,(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)}{\sqrt{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\,\varepsilon_z + \varepsilon_z^2}}, \qquad \sigma_z = \sigma_r + \frac{k\,(\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z)}{\sqrt{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta\,\varepsilon_z + \varepsilon_z^2}}, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_\theta = A - \frac{C}{r^2}, \qquad \varepsilon_z = B, \tag{2.2}$$

$$u = -(A + B)\,r - \frac{C}{r}, \qquad v = (2A + B)\,r\theta, \qquad w = Bz. \tag{2.3}$$

Принимая $C \neq 0$ и вводя обозначения $A = aC$, $B = bC$,

$$\alpha = a^2 + ab + b^2, \qquad \beta = a + \frac{1}{2}b, \tag{2.4}$$

где a и b — новые произвольные постоянные, выражения (2.1)—(2.3) можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_r = -D - \int\limits_{r_1}^{r} \frac{2k\,(1 - \beta r^2)}{\sqrt{\alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1}} \frac{dr}{r}, \qquad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r - \frac{2k\,(1 - \beta r^2)}{\sqrt{\alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1}}, \qquad \sigma_z = \sigma_r - \frac{k\,[1 - (a + 2b)\,r^2]}{\sqrt{\alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1}}, \tag{2.5}$$

$$-\frac{u}{C} = (a + b)\,r + \frac{1}{r}, \qquad \frac{v}{C} = (2a + b)\,r\theta, \qquad \frac{w}{C} = bz. \tag{2.6}$$

Используя условие на внутренней поверхности $r = r_1$, получим $D = P$. Тогда, вычисляя интеграл для выражения σ_r, будем иметь

$$\sigma_r = -P - k\ln\frac{\sqrt{\alpha r_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} - \beta r_1^2 + 1}{\sqrt{\alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1} - \beta r^2 + 1}\,\frac{r^2}{r_1^2} -$$

$$-\frac{k\beta}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha r_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{\alpha}\, r_1^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1} + \sqrt{\alpha}\, r^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}. \qquad (2.7)$$

Из условия на внешней поверхности $\sigma_r(r_2) = 0$ находим

$$\frac{P}{k} = \int_{r_1}^{r_2}\frac{2(\beta r^2 - 1)}{\sqrt{\alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1}}\,\frac{dr}{r}. \qquad (2.8)$$

Вводя обозначения

$$I_0 = \int_{r_1^2}^{r_2^2}\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 - 2\beta x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha r_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} + \sqrt{\alpha}\, r_2^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha r_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{\alpha}\, r_1^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}, \qquad (2.9)$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{r_2^2}}^{\frac{1}{r_1^2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2\beta x + \alpha}} = \ln\frac{\sqrt{\alpha r_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} - \beta r_1^2 + 1}{\sqrt{\alpha r_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} - \beta r_2^2 + 1}\,\frac{r_2^2}{r_1^2}, \qquad (2.10)$$

получим

$$\frac{P}{k} = \beta I_0 - I_2. \qquad (2.11)$$

Подставляя выражения σ_θ и σ_z из (2.5) в соотношения

$$\int_{r_1}^{r_2}\sigma_\theta r\,dr = M, \qquad \int_{r_1}^{r_2}\sigma_z r\,dr = N \qquad (2.12)$$

и используя в ходе преобразования двухкратных интегралов равенство (2.8), находим

$$\begin{aligned} \frac{2M}{k} &= (\beta r_1^2 - 1)\,I_0 + \beta I_1 - r_1^2 I_2, \\ \frac{2N}{k} &= r_1^2(\beta I_0 - I_2) + \frac{3}{2}\,b I_1, \end{aligned} \qquad (2.13)$$

где введено новое обозначение

$$I_1 = \int_{r_1^2}^{r_2^2}\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2 - 2\beta x + 1}} = \frac{\sqrt{\alpha r_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} - \sqrt{\alpha r_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1}}{\alpha} -$$

$$
-\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\alpha r_2^4-2\beta r_2^2+1}+\sqrt{\alpha}\,r_2^2-\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha r_1^4-2\beta r_1^2+1}+\sqrt{\alpha}\,r_1^2-\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}. \tag{2.14}
$$

Систему уравнений (2.11) и (2.13) преобразованием можно привести к более простым выражениям

$$
\sqrt{\alpha r_2^4-2\beta r_2^2+1}-\sqrt{\alpha r_1^4-2\beta r_1^2+1}=\frac{2\alpha(2N-Pr_1^2)}{3kb}+
$$

$$
+\frac{\beta}{2k}\left\{2M-Pr_1^2-\frac{2\beta(2N-Pr_1^2)}{3b}\right\}. \tag{2.15}
$$

$$
\frac{\sqrt{\alpha r_1^4-2\beta r_1^2+1}-\beta r_1^2+1}{\sqrt{\alpha r_2^4-2\beta r_2^2+1}-\beta r_2^2+1}\,\frac{r_2^2}{r_1^2}=
$$

$$
=\exp\left\{\frac{2\beta^2(2N-Pr_1^2)}{3kb}-\frac{\beta(2M-Pr_1^2)}{k}-\frac{P}{k}\right\}. \tag{2.16}
$$

$$
\frac{\sqrt{\alpha r_2^4-2\beta r_2^2+1}+\sqrt{\alpha}\,r_2^2-\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}{\sqrt{\alpha r_1^2-2\beta r_1^2+1}+\sqrt{\alpha}\,r_1^2-\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}}}=\exp\left\{\frac{2\beta(2N-Pr_1^2)}{3kb}-\frac{2M-Pr_1^2}{k}\right\}. \tag{2.17}
$$

Таким образом, получена система из трех алгебраических уравнений (2.15)—(2.17), содержащих два неизвестных a и b. Третье из этих уравнений дает соотношение между P, M и N, при котором наступает предельное состояние оболочки.

Отметим, что условие

$$
\int_{r_1}^{r_2}\sigma_\theta\,dr=T, \tag{2.18}
$$

как нетрудно проверить, удовлетворяется тождественно.

В случае отсутствия продольных деформаций появляется поверхность разрыва. Принимая в выражениях (2.5) $b=0$, получим

$$
\sigma_r=-D\pm 2k\ln r,\quad \sigma_\theta=\sigma_r\pm 2k,\quad \sigma_z=\sigma_r\pm k. \tag{2.19}
$$

Принимая D различным на разных сторонах от поверхности разрыва $r=r_0$ и удовлетворяя условиям $\sigma_r(r_1)=-P$, $\sigma_r(r_2)=0$, $\sigma_r(r_0-0)=$ $=\sigma_r(r_0+0)$, находим формулы

$$
\sigma_r=-2k\ln\frac{r_2}{r},\qquad \sigma_\theta=2k\left(1-\ln\frac{r_2}{r}\right),\qquad r_0\leqslant r\leqslant r_2. \tag{2.20}
$$

$$
\sigma_r=-P-2k\ln\frac{r}{r_1},\qquad \sigma_\theta=-P+2k\left(1+\ln\frac{r}{r_1}\right),\qquad r_1\leqslant r\leqslant r_0.
$$

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{-\frac{p}{4k}},$$

полученные Р. Хиллом [3]. Как в первом, так и в этом параграфе пренебрегается изменение геометрических размеров тела в ходе деформации.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 VI 1964

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ԻԴԵԱԼԱԿԱՆ ՊԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Նախորդ հոդվածներում ստացված՝ պլաստիկության տեսության հավասարումների մասնավոր լուծումների հիման վրա կառուցվում են երկու նոր խնդիրների լուծումներ: Առաջին պարագրաֆում ուսումնասիրվում է ուղղանկյուն սալի սահմանային վիճակը, երբ նրա վրա ազդում են ձգող ուժեր, ծռող և ոլորող մոմենտներ: Ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ պարագրաֆում ուսումնասիրվող խնդիրներում ընդունվում է, որ նյութը անսեղմելի է և ենթարկվում է Հուբեր-Միզեսի պլաստիկության պայմանին: Երկրորդ պարագրաֆում դիտարկվում է գլանային հաստ թաղանթի համատեղ ծռման և ձգման խնդիրը (գծ. 3):

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
2. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
4. *Прагер В.* и *Ходж Ф. Г.* Теория идеально-пластических тел. ИЛ, М., 1956.
5. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. ДАН СССР, **156**, № 1, 1964.
6. *Задоян М. А.* О некотором частном решении уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. ДАН АрмССР, **39**, № 5, 1964.
7. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.