

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. МОСКАЛЕНКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ

На основе применения линеаризованных уравнений нелинейной теории упругости дано точное решение задачи об устойчивости толстой трехслойной плиты при условиях типа Навье на боковых гранях («опертый» край). В качестве контактных условий использованы условия отсутствия проскальзывания между слоями. На конкретных примерах дано численное сопоставление результатов точного и известных приближенных решений.

§ 1. Задача об устойчивости равновесия упругого тела при отсутствии объемных сил сводится, как известно [1, 2], к определению собственных функций и собственных значений краевой задачи для линеаризованных относительно возмущений уравнений нелинейной теории упругости.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + L^0 u' &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + L^0 v' &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + L^0 w' &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left(L^0 = \tau_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tau_z^0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2\tau_{xz}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2\tau_{yz}^0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\left[\tau'_x + \sigma_x^0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau'_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau'_{xz} \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \cos \widehat{nx} + \\ &+ \left[\tau'_{xy} + \tau_{xy}^0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y^0 \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau'_{yz} \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \cos \widehat{ny} + \\ &+ \left[\tau'_{xz} + \tau_{xz}^0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau'_{yz} \frac{\partial u'}{\partial y} + \sigma_z^0 \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \cos \widehat{nz} = S_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ноликом обозначены компоненты невозмущенного напряженного состояния, относительно которого предполагается, что для его опре-

деления могут быть использованы уравнения линейной теории упругости. Штрихи относятся к возмущениям тензора напряжений, вектора смещений и поверхностных нагрузок.

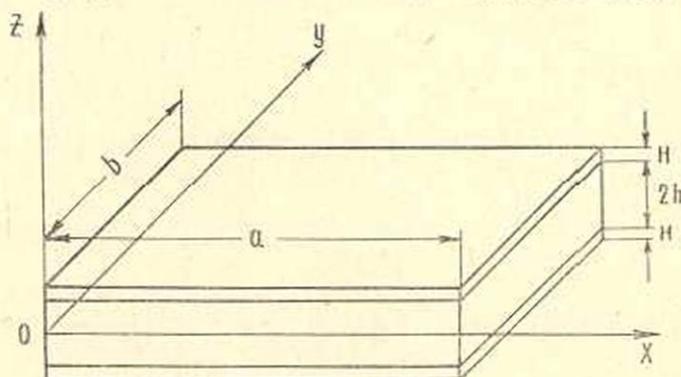
Используя для возмущений закон Гука, получим систему уравнений для возмущений компонент вектора смещений

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu \Delta u' + L^0 u' &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu \Delta v' + L^0 v' &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu \Delta w' + L^0 w' &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

§ 2. Рассмотрим устойчивость равновесия упругой прямоугольной в плане плиты, составленной из трех изотропных слоев. Плиту будем считать симметричной относительно плоскости $z = 0$ (фиг. 1), упругие постоянные λ_1, μ_1 для крайних слоев одинаковыми, а коэффициент Пуассона ν одинаковым для всех трех слоев. Кроме того, будем предполагать, что нагрузки p и p_1, q и q_1 связаны соотношениями

$$\frac{p}{\mu} = \frac{p_1}{\mu_1}, \quad \frac{q}{\mu} = \frac{q_1}{\mu_1}. \quad (2.1)$$

Здесь λ, μ — упругие постоянные Ламе для среднего слоя.



Фиг. 1.

При этом невозмущенное напряженное состояние определится равенствами

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = -q, \quad \sigma_z^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \quad (2.2)$$

— для среднего слоя и

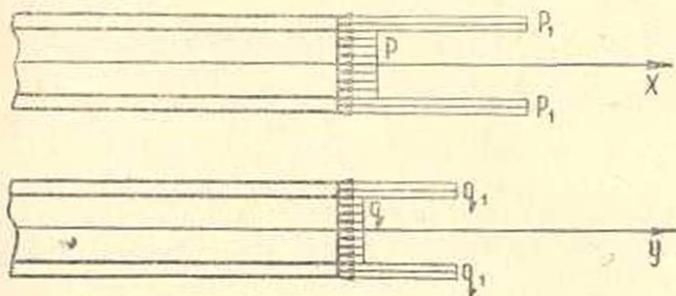
$$\sigma_x^0 = -p_1, \quad \sigma_y^0 = -q_1, \quad \sigma_z^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \quad (2.3)$$

— для верхнего и нижнего слоев (фиг. 2).

В качестве условий на боковых гранях ($x = 0, x = a, y = 0, y = b$) возьмем условия вида

$$\sigma_n + \sigma_n^0 \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, \quad u_x = 0, \quad w = 0. \quad (2.4)$$

Здесь и далее штрихи опускаются; σ_n — нормальное напряжение, u_n — нормальное смещение, u_x — смещение в направлении касательной к контуру плиты. Условия (2.4) соответствуют известным в теории пластин и оболочек условиям Навье.



Фиг. 2.

В качестве условий контакта между слоями выберем условия отсутствия проскальзывания. Это дает

$$u|_{z-h-0} = u|_{z-h+0}, \quad v|_{z-h-0} = v|_{z-h+0}, \quad w|_{z-h-0} = w|_{z-h+0}. \quad (2.5)$$

Приравняв компоненты усилий на площадках поверхности контакта, получим

$$S_x|_{z-h-0} = S_x|_{z-h+0}, \quad S_y|_{z-h-0} = S_y|_{z-h+0}, \quad S_z|_{z-h-0} = S_z|_{z-h+0}. \quad (2.6)$$

Из условий (2.6) и (1.2) найдем контактные условия для компонент напряжения

$$\tau_{xz}|_{z-h-0} = \tau_{xz}|_{z-h+0}, \quad \tau_{yz}|_{z-h-0} = \tau_{yz}|_{z-h+0}, \quad \sigma_z|_{z-h-0} = \sigma_z|_{z-h+0}. \quad (2.7)$$

Аналогично для свободной поверхности получим

$$\tau_{xz}|_{z-h+H} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z-h+H} = 0, \quad \sigma_z|_{z-h+H} = 0. \quad (2.8)$$

§ 3. Решение уравнений (1.3) для среднего слоя будем искать в виде, удовлетворяющем граничным условиям „опирания“ (2.4)

$$u = F(z) \cos k_1 x \sin k_2 y, \quad v = \Phi(z) \sin k_1 x \cos k_2 y, \quad w = \Psi(z) \sin k_1 x \sin k_2 y,$$

$$k_1 = \frac{m_1 \pi}{a}, \quad k_2 = \frac{m_2 \pi}{b} \quad (m_1, m_2 = 1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

Подставляя выражения (3.1) в уравнения (1.3), убеждаемся, что функции F , Φ , Ψ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \mu F'' - [(\lambda + \mu) k_1^2 + (1 - \alpha) \mu k^2] F - (\lambda + \mu) k_1 k_2 \Phi + (\lambda + \mu) k_1 \Psi' &= 0, \\ -(\lambda + \mu) k_1 k_2 F + \mu \Phi'' - [(\lambda + \mu) k_2^2 + (1 - \alpha) \mu k^2] \Phi + (\lambda + \mu) k_2 \Psi' &= 0, \\ -(\lambda + \mu) k_1 F' - (\lambda + \mu) k_2 \Phi' + (\lambda + 2\mu) \Psi'' - (1 - \alpha) \mu k^2 \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left(k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad z = \frac{pk_1^2 + qk_2^2}{\mu k^2} \right).$$

Корни соответствующего характеристического уравнения даются выражениями

$$\gamma_{1,2} = \pm r_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm r_2, \quad \gamma_{5,6} = \pm r_2.$$

Здесь

$$r_1^2 = r_2^2 = k^2(1 - \alpha), \quad r_3^2 = k^2(1 - \tau\alpha), \quad \tau = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Общее решение уравнений (3.2) имеет следующий вид:

$$F(z) = (-k_2 a_1 + k_1 a_2) \operatorname{sh} r_1 z + k_1 a_3 \operatorname{sh} r_3 z + \\ + (-k_2 b_1 + k_1 b_2) \operatorname{ch} r_1 z + k_1 b_3 \operatorname{ch} r_3 z,$$

$$\Phi(z) = (k_1 a_1 + k_2 a_2) \operatorname{sh} r_1 z + k_2 a_3 \operatorname{sh} r_3 z + (k_1 b_1 + k_2 b_2) \operatorname{ch} r_1 z + k_2 b_3 \operatorname{ch} r_3 z,$$

$$\Psi(z) = \frac{k^2}{r_1} a_1 \operatorname{ch} r_1 z + r_2 a_3 \operatorname{ch} r_3 z + \frac{k^2}{r_1} b_2 \operatorname{sh} r_1 z + r_3 b_3 \operatorname{sh} r_3 z. \quad (3.3)$$

Здесь a_{1-3} , b_{1-3} — постоянные интегрирования.

Для дальнейшего необходимо определить выражения для трех компонент τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z тензора возмущений напряжений:

$$\tau_{xz} = \mu \left\{ \left(-k_2 r_1 a_1 + k_1 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} a_1 \right) \operatorname{ch} r_1 z + 2k_1 r_3 a_3 \operatorname{ch} r_3 z + \right. \\ \left. + \left(-k_2 r_1 b_1 + k_1 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} b_1 \right) \operatorname{sh} r_1 z + 2k_1 r_3 b_3 \operatorname{sh} r_3 z \right\} \cos k_1 x \sin k_2 y, \\ \tau_{yz} = \mu \left\{ \left(k_1 r_1 a_1 + k_2 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} a_1 \right) \operatorname{ch} r_1 z + 2k_2 r_3 a_3 \operatorname{ch} r_3 z + \right. \\ \left. + \left(k_1 r_1 b_1 + k_2 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} b_1 \right) \operatorname{sh} r_1 z + 2k_2 r_3 b_3 \operatorname{sh} r_3 z \right\} \sin k_1 x \cos k_2 y, \quad (3.4) \\ \sigma_z = \mu \left\{ 2k^2 a_2 \operatorname{sh} r_1 z + (k^2 + r_1^2) a_3 \operatorname{sh} r_3 z + \right. \\ \left. + 2k^2 b_2 \operatorname{ch} r_1 z + (k^2 + r_1^2) b_3 \operatorname{ch} r_3 z \right\} \sin k_1 x \sin k_2 y.$$

Решения для крайних слоев имеют аналогичный вид. Для верхнего слоя вместо величин μ , a_i , b_i следует подставить μ_1 , A_i , B_i , а для нижнего слоя — μ_2 , A'_i , B'_i .

§ 4. Из симметрии плиты относительно плоскости $z = 0$, а также из свойств граничных и контактных условий вытекает, что возможны два вида потери устойчивости, сопровождающиеся, соответственно, антисимметричной или симметричной деформацией (изгиб и симметричное выпучивание).

В случае антисимметричной деформации должны выполняться равенства

$$b_i = 0, \quad A_i' = A_i, \quad B_i' = -B_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Удовлетворяя условиям (2.5), (2.7) и (2.8), получим девять уравнений для определения девяти неизвестных a_i , A_i , B_i . Критические значения параметра α внешней нагрузки получим, приравняв нулю определитель системы уравнений. При этом оказывается, что определитель распадается на два сомножителя. В связи с этим рассмотрим два случая.

1. Первый сомножитель равен нулю:

$$\xi c_1 C_1 + t_1^2 s_1 S_1 = 0. \quad (4.2)$$

В этом случае должны выполняться равенства

$$a_2 = a_3 = 0, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad B_2 = B_3 = 0.$$

Компонента ω вектора смещения обращается в нуль.

2. Второй сомножитель равен нулю:

$$\begin{aligned} & \xi^2 [(t_1^2 C_1 S_2 - 4t_1^2 S_1 C_3) c_1 c_2 + (\xi^2 S_1 C_3 - 4t_1^2 C_1 S_3) t_1^2 s_1 s_3] + \\ & + \xi^2 a^2 (\xi^2 c_1 s_2 - 4t_1^2 s_1 c_3) + \\ & + [\xi^2 (C_1 C_3 - 1) - 4t_1^2 t_3^2 S_1 S_2] [(2 - \xi)^2 c_1 s_2 - 4(1 - \xi)^2 t_1^2 s_1 c_3] + \\ & + [\xi^2 S_1 S_3 - 4(C_1 C_3 - 1)] [(\xi - 2\xi)^2 t_1^2 s_1 c_3 - \xi^2 (1 - \xi)^2 c_1 s_2] = 0. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь

$$\xi = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad t_i = \frac{r_i}{k}, \quad \xi = 1 + t_1^2, \quad s_i = \frac{\text{sh } r_i h}{t_i},$$

$$c_i = \text{ch } r_i h, \quad S_i = \frac{\text{sh } r_i H}{t_i}, \quad C_i = \text{ch } r_i H.$$

При этом постоянные a_1 , A_1 , B_1 должны обращаться в нуль.

Симметричной деформации соответствуют соотношения

$$a_i = 0, \quad A_i = -A_i, \quad B_i = B_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.4)$$

Удовлетворяя условиям (2.5), (2.7) и (2.8) и приравняв нулю определитель полученной системы уравнений, получим уравнение для определения критического значения параметра α внешней нагрузки. Как и в предыдущем случае, определитель распадается на два сомножителя, и следует рассмотреть два частных случая.

1. Первый сомножитель обращается в нуль

$$\xi C_1 s_1 + S_1 c_1 = 0. \quad (4.5)$$

тогда справедливы соотношения:

$$b_2 = b_3 = 0, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad B_2 = B_3 = 0. \quad (4.6)$$

Соответствующее деформированное состояние характеризуется обращением в нуль компоненты ω вектора смещений.

2. Приравнявая нулю второй сомножитель, получим

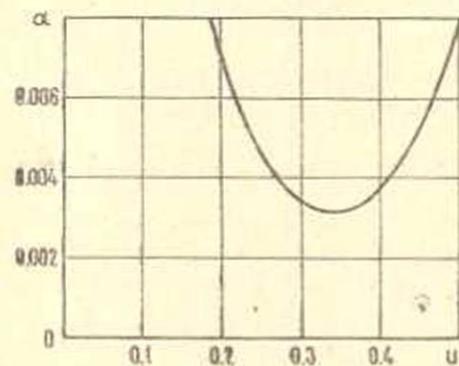
$$\begin{aligned} & \xi x^2 [t_3^2 s_1 s_2 (C_1^2 C_2 S_2 - 4t_1^2 C_2 S_1) + c_1 c_2 (C_1^2 S_1 C_2 - 4t_3^2 C_1 S_2)] + \\ & + \xi^2 x^2 (C_1^2 S_1 c_2 - 4t_3^2 c_1 s_2) + \\ & + [C_1^2 (C_1 C_2 - 1) - 4t_1^2 t_3^2 s_1 s_2] [(2 - \xi)^2 s_1 c_2 - 4(1 - \xi)^2 t_3^2 c_1 s_2] + \\ & + [C_1^2 S_1 S_2 - 4(C_1 C_2 - 1)] [(C_1 - 2\xi)^2 t_3^2 c_1 s_2 - C_1^2 (1 - \xi)^2 s_1 c_2] = 0. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Отметим, что физический смысл имеют только те критические значения параметра α , которые малы по сравнению с единицей. Это обусловлено тем, что в исходном напряженно-деформированном состоянии деформации имеют порядок $\frac{p}{\mu}$ или $\frac{q}{\nu}$, то есть порядок α тогда как исходные уравнения получены в предположении, что эти деформации малы.

Следует также отметить, что предположение (2.1) и предположение о постоянстве коэффициента Пуассона ν можно снять. Это приведет лишь к тому, что выражения для корней характеристического уравнения r_i будут различными для среднего и крайних слоев и несколько усложнятся уравнения (4.4) и (4.7).

§ 5. Рассмотрим антисимметричную (изгибную) потерю устойчивости толстой трехслойной плиты с мягким средним слоем, квадратную в плане ($a = b = 10(h + H)$), $H = 0.1(h + H)$, $\nu = 0.3$; $\xi = 0.001$. Приближенный подход [3, 4] дает для α значение, равное 0.00492. Решение уравнения (4.4) дает значение $\alpha = 0.00497$.

Для плиты с жестким средним слоем ($a = b = 10(h + H)$, $H = 0.5(h + H)$, $\nu = 0.3$, $\xi = 0.1$) по теории [5] получаем $\alpha = 0.0599$. Точное значение оказывается равным $\alpha = 0.0631$.



Фиг. 3.

Результаты вычислений зависимости точного значения α от отношения a полутолщины ($h + H$) плиты к длине полуволны выпучивания $\frac{a}{m_2}$ нанесены на фиг.

($\nu = 0.4$, $\xi = 0.000119$). Минимальное значение оказывается равным $\alpha = 0.00330$. Приближенные методы [3, 4] дают $\alpha = 0.00273$. Приближенная теория К. М. Муштари [6]

дает значение $\alpha = 0.00320$. Критическое значение α , полученное в предположении, что крайние слои — пластины в смысле гипотез Кирхгофа-Лява, а средний слой — упругий континуум [6, 7], оказывается равным $\alpha = 0.00315$.

Վ. Ն. ՄՈՍՈՎԵՆԿՈ

ԵՅԱՇԵՐՏ ՍՈՍԻ ԿՈՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Ոչ դժային առաձգականության տեսության դժայնացված հալասարումների հիման վրա ստացված է եռաշերտ սալի կայունության խնդրի ճշգրիտ լուծումը կողմնային կողերում նավթի տիպի եզրային պայմանների դեպքում: Գիտարկված մի բանի կոնկրետ խնդիրներում բերված է ճշգրիտ և հայտնի մոտավոր լուծումների արդյունքների համեմատությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.—М., 1948.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
3. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. J. Aeronaut. Sci., 15, № 7, 1948.
4. Прусакон А. П. Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем. ПММ, 15, вып. 1, 1951.
5. Григолюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем. Известия АН СССР, ОТН, № 1, 1958.
6. Муштари Х. М. Об одном уточнении приближенной теории трехслойных пластин с заполнителем. Известия АН СССР, ОТН, механика и машиностр., № 1, 1962.
7. Воронович А. П. Устойчивость обшивки с заполнителем при сжатии. Диссертация, 1948.