ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 6, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

МОВСИСЯН Л. А.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Целью настоящей работы является исследование поведения упругой цилиндрической оболочки при продольном ударе жесткой массой.

Известная нам работа [1], по-видимому, единственная, где продольное нагружение на оболочку прилагается ударно. Для сжимающего усилия, действующего на поперечных сечениях оболочки, автор берет значение сжимающего усилия балки.

В настоящей работе показано, что для оболочек при продольном ударе, кроме продольного сжимающего усилия, должно быть учтено также окружное усилие и что потеря устойчивости такой оболочки при продольном ударе происходит так, как при совместном действии продольного сжатия и поперечного давления.

§ 1. Постановка задачи

Пусть имеется идеальная круговая замкнутая цилиндрическая оболочка длиной l, толщиной h и радиусом r. Один конец оболочки защемлен (подробно о граничных условиях потом), а второй конец свободен. Оболочка подвергается осесимметричному удару жесткой массой по свободному концу в продольном направлении.

Волна сжатия, распространяясь в оболочке, может достигнуть такой величины, что первоначальное безмоментное напряженное состояние оболочки будет не единственным. Причем возникшее моментное состояние будет иметь различный характер в зависимости от длины распространения волны. В частности, начиная от некоторой длины распространения продольной волны, амплитуды моменткого состояния будут бесконечно возрастать. В отличие от статической потери устойчивости, где для заданной длины оболочки определяется критическая сила, здесь вопрос ставится так: для заданной силы найти критическую длину потери устойчивости. Критической назовем ту минимальную длину распространения продольной волны, при которой моментное состояние, если оно возникнет, будет носить возрастающий характер. Так как потеря устойчивости при ударе носит локальный характер (что и показывают экспериментальные исследования

[1]), то граничные условия ставятся не на концах оболочки, как обычно, а одна группа ставится на одном из концов (в зависимости от того, критическая длина реализуется у ударяемого конца или у защемленного конца), а вторая группа—на фронте волн сжатия.

Что же касается части оболочки впереди фронта ударной волны, то там останется безмоментное напряженное состояние, так как после возникновения неустойчивости эта область неспособна будет передавать высокую величину сжимающей силы, которая уже вызвала потерю устойчивости.

Из вышесказанного следует, что для определения критичеcкой длины потери устойчивости оболочки будем иметь общеизвестные уравнения [2] („уравнения в вариациях")

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{\alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{(1-\nu^2)\,m}{Eh}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{(1-\nu^2)\,m}{Eh}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \varepsilon^2\nabla^4 w + w - \frac{1-\nu^2}{Ehr^2}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(T_1^*\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(T_2^*\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)\right] = \frac{(1-\nu^2)\,m}{Eh}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (1.1)$$

где все обозначения—общепринятые [2], T_1^* и T_2^*—продольное и окружное усилия, значения которых определяются из безмоментного напряженного состояния.

§ 2. Определение T_1^* и T_2^*

Для определения T_1^* и T_2^* будем исходить из известных уравнений безмоментного состояния [3] с добавлением инерционных членов*

$$\frac{\partial T_1^*}{\partial \alpha} = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad S^* = 0, \quad T_1^* = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu\frac{w}{r}\right),$$

$$T_2^* = -rm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad v = 0, \quad T_2^* = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{w}{r} + \nu\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right). \qquad (2.1)$$

К системе (2.1) надо присоединить граничные и начальные условия.

Граничные условия таковы:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \qquad (2.2)$$

$$2\pi r T_1^* = -M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{при} \quad \alpha = l, \qquad (2.3)$$

где M — масса ударяющего тела.

* Надо иметь в виду, что, хотя для перемещений здесь и в (1.1) приняты общие обозначения, они различные. Здесь они—перемещения безмоментного состояния а в (1.1)—приращения перемещений.

Если обозначить через $k\left(k=\frac{M}{2\pi rlm}\right)$ отношение веса ударяющего тела к весу оболочки, из (2.1) и (2.3) получим

$$-kl\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2(1-\nu^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\nu\frac{w}{r}\right) \quad \text{при} \quad \alpha=l, \tag{2.4}$$

где $a=\sqrt{\frac{Eg}{\rho}}$ — скорость распространения упругой волны в цилиндре.

Начальные условия следующие:

$$u=\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t=0, \quad 0\leqslant\alpha<l,$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-c \quad \text{при} \quad t=0, \quad \alpha=l, \tag{2.5}$$

где c — скорость удара,

$$w=\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t=0, \quad 0\leqslant\alpha\leqslant l. \tag{2.6}$$

Представим уравнения движения (2.1) в перемещениях

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\frac{1-\nu^2}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ \frac{\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{w}{r^2}=-\frac{1-\nu^2}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Решения (2.7) будем искать, разлагая перемещения в ряды по малому параметру ν. Легко показать, что ряд для u содержит лишь четные степени ν, а ряд для w — только нечетные, так что

$$\begin{gathered}u=u_0+\nu^2u_2+\cdots,\\ w=\nu w_1+\nu^3w_3+\cdots.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Для u_i и w_{i+1} имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\alpha^2}=0,\\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}+\frac{a^2}{r^2}w_1=-\frac{a^2}{r}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial\alpha^2}=\frac{a^2}{r}\frac{\partial w_{i-1}}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 u_{i-2}}{\partial t^2},\\ \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial t^2}+\frac{a^2}{r^2}w_{i+1}=-\frac{a^2}{r}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha}+\frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Условия на концах для каждого приближения будут

$$u_i = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0$$

$$\left.\begin{array}{c} kl\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -a^2\dfrac{\partial u_0}{\partial \alpha} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ kl\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + a^2\dfrac{\partial u_i}{\partial \alpha} = kl\dfrac{\partial^2 u_{i-2}}{\partial t^2} - \dfrac{a^2}{r}w_{i-1} \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = l. \tag{2.10}$$

Начальные условия

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant l, \quad i = 2, 4, \cdots$$

и

$$u_0 = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad 0 < \alpha < l, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -c \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \alpha = l,$$

$$w_{i+1} = \frac{\partial w_{i+1}}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant l. \tag{2.12}$$

Полученные рекуррентные уравнения позволяют определить каждое новое приближение, если известны все предыдущие. Как видно из (2.9)—(2.12), для каждого приближения u_i имеем волновое уравнение, причем нулевое приближение, как и следовало ожидать, дает решение для балки, а для w_{i+1} имеются уравнения вынужденных колебаний.

Волновые уравнения будем решать методом распространяющихся волн.

Для u_0 имеется готовое решение балки [4, 5, 6], мы приведем его в окончательном виде

$$u_0 = \frac{kcl}{a}\left[e^{\frac{l-at-\alpha}{kl}} - 1\right] \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t < \frac{l}{a}, \tag{2.13}$$

$$u_0 = \frac{kcl}{a}\left[e^{\frac{l-at-\alpha}{kl}} - e^{\frac{l+at-\alpha}{kl}}\right] \quad \text{для} \quad \frac{l}{a} < t \leqslant \frac{2l}{a} \tag{2.14}$$

и т. д.

Функцию w_1 определяем из второго уравнения (2.9) и (2.12)

$$w_1 = -a\int_0^t \frac{\partial u_0}{\partial \tau}\sin\frac{a}{r}(t-\tau)\,d\tau$$

или

$$w_1 = \frac{crk^2l^2}{a(r^2+k^2l^2)}e^{\frac{l-\alpha}{kl}}\left[e^{-\frac{at}{kl}} - \cos\frac{at}{r} + \frac{r}{kl}\sin\frac{at}{r}\right] \tag{2.15}$$

для $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{l}{a}$ и т. д.

Таким образом, можно найти любое приближение. Например, второе приближение имеет вид

$$u_2 = \frac{cr^2}{4akl\,(r^2+k^2l^2)}\left[\operatorname{ch}\frac{l-at-\alpha}{kl}-1\right]+$$

$$+\frac{cr^3k^2l^2}{a\,(r^2+k^2l^2)^2}\,e^{\frac{l-\alpha}{kl}}\sin\frac{at}{r}-\frac{cr^2k^3l^3}{a\,(r^2+k^2l^2)^2}\,e^{\frac{l-\alpha}{kl}}\sin\frac{at}{r}+$$

$$+\frac{cr^2kl}{4a\,(r^2+k^2l^2)}\,\frac{l-\alpha-at}{kl}\,e^{\frac{l-\alpha-at}{kl}}\quad \text{для}\quad 0<t\leqslant\frac{l}{a}. \tag{2.16}$$

Имея выражения для u_i и w_{i+1}, можно получить T_1^* и T_2^* с любой наперед заданной точностью.

§ 3. Свободно опертая оболочка

Рассмотрим случай полубесконечной оболочки, край $\alpha=0$ которой свободно оперт и удар производится по этому концу. Как уже отметили, одна из групп граничных условий должна быть поставлена на ударяемом конце цилиндра, а вторая—на фронте волн. Нетрудно видеть, что на фронте волн, если иметь в виду гипотезу недеформируемых нормалей, будем иметь условия защемления, то есть $u=v=w=\frac{\partial w}{\partial \alpha}=0$. Для решения задачи и получения некоторых качественных результатов делаем допущение, что на фронте также имеются условия опирания. Такое допущение может влиять только на количественную сторону получаемых результатов (причем в некоторых случаях возможно несущественно), а нас в основном интересует качественная картина выпучивания, кроме того известно, что при решении задач устойчивости оболочки граничные условия, как правило, удовлетворяются лишь приближенно.

Полагая также, что отношение веса ударяющего тела к весу оболочки настолько большое, что можно принять равным бесконечности ($k\to\infty$), для T_1^* и T_2^* с точностью до ν^2 включительно получим значения

$$T_1^* = -\frac{Ehc}{a}\left(1+\nu^2\cos\frac{at}{r}\right),$$

$$T_2^* = -\frac{\nu Ehc}{a}\cos\frac{at}{r}, \tag{3.1}$$

верные для первого прохождения волны напряжений.

Ищем решение (1.1) в виде

$$\begin{aligned} u &= U(t)\sin\lambda\alpha\cos n\beta,\\ v &= V(t)\sin\lambda\alpha\sin n\beta,\\ w &= W(t)\sin\lambda\alpha\cos n\beta, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\lambda = \frac{m\pi}{L}$, m и n — целые числа, а L — такая длина распространения упругой волны, при которой оболочка теряет устойчивость.

Подставляя (3.2) в (1.1), для неизвестных $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ получим систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$m\frac{d^2\bar{f}}{dt^2} + (\bar{R} - T_1^*\bar{S}_1 - T_2^*\bar{S}_2)\bar{f} = 0, \tag{3.3}$$

где $\bar{f}$ — вектор с компонентами $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$,

$$\bar{R} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{Vmatrix} \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2 & -\frac{1+\nu}{2}\lambda n & -\nu\lambda \\ -\frac{1+\nu}{2}\lambda n & n^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2 & n \\ -\nu\lambda & n & \varepsilon^2(\lambda^2+n^2)^2 \end{Vmatrix}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{r^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{Vmatrix}, \qquad \bar{S}_2 = \frac{1}{r^2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{Vmatrix}.$$

Критическая длина потери устойчивости по определению найдется из условия [2]

$$\left|\bar{R} - \frac{Ehc}{a}\left(1 \pm \frac{1}{2}\nu^2\right)\bar{S}_1 \pm \frac{1}{2}\frac{Ehc\nu}{a}\bar{S}_2 - \frac{1}{4}\frac{a^2}{r^2}\bar{E}\right| = 0, \tag{3.4}$$

где $\bar{E}$ — единичная матрица.

Наименьшее значение L, определяемое из (3.4), по определению есть критическая длина (l_{kp}).

Таким образом, для заданной скорости удара можно найти критическую длину выпучивания и время потери устойчивости $\left(t = \frac{l_{kp}}{a}\right)$.

Фактически, полученное решение дает возможность определить критическую длину и для конечной оболочки. В самом деле, если скорость удара достаточно большая (то есть больше скорости, определяемой из условия $l = l_{kp}$), то потеря устойчивости произойдет при первом прохождении волны сжатия, $l_{kp} < l$, и все полученные результаты останутся в силе.

В случае, когда c такое, что при первом прохождении волны сжатия оболочка не теряет устойчивости, то потеря устойчивости может произойти после нескольких отражений волны напряжения, так как при каждом отражении величина сжимающего усилия увеличивается по ступенчатому закону. Поэтому после Q отражений для T_1^* и T_2^* будем иметь

$$T_1^* = -\frac{Ehc}{a}(1+Q)\left(1+\nu^2\cos\frac{at}{r}\right),$$
$$T_2^* = -\frac{\nu Ehc}{a}(1+Q)\cos\frac{at}{r}. \tag{3.5}$$

Вопрос о том, после скольких отражений произойдет выпучивание, решается следующим образом. Если для заданной скорости удара данная оболочка не выпучивается при первом прохождении волн, то можно рассматривать удар по второму концу со скоростью $2c$ и найти l_{kp}. Если и тогда не получится потеря устойчивости, то можно рассматривать удар на ударяемом конце со скоростью $3c$ и т. д.

Таким образом, для данной оболочки и заданной скорости удара найдутся усилия потери устойчивости, критическая длина и время выпучивания $t = \frac{l}{a}Q + \frac{l_{kp}}{a}$.

Если критические усилия достигаются при четном числе отражений, то потеря устойчивости произойдет на ударяемом конце, при нечетном отражении—на другом конце. С появлением вмятин ударяющее тело движется за счет увеличения вмятин в том конце, где началось выпучивание, в то время как второй конец цилиндра остается невозмущенным.

Для критической длины потери устойчивости при ударе получится достаточно простая формула в случае, если скорость удара достаточно большая. В этом случае вместо (3.1) можно принять приближенно

$$T_1^* = -\frac{Ehc}{a}(1+\nu^2),$$
$$T_2^* = -\frac{\nu Ehc}{a},$$

а уравнения устойчивости можно брать (1.1) без инерционных членов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XI 1963

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՐՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է գլանային թաղանթի կայունության հարցը, երբ գլանի մի եզրը ամրակցված է, իսկ մյուս եզրն ազատ է։ Կոշտ մարմինը c արագությամբ հարվածում է գլանի ազատ եզրին։ Ստացված է

գլանի կայունության կորցնելու կրիտիկական երկարությունը տված հարվածի արագության համար: Կրիտիկական երկարության համար ստացված է անընդհատ սպեկտր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коппа А.* О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе. „Механика" (сб. переводов), № 6, 1961.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
4. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле, Физматгиз, М., 1959.
5. *Кильчевский Н. А.* Теория соударения твердых тел. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. *Goldsmith W.* Impact, London, 1960.