

С. С. ЗАРГАРЯН

О КРУЧЕНИИ ВАЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ НЕСООСНОЙ ПОЛОСТЬЮ

В настоящее время существует небольшое число решений задач о кручении круговых цилиндров (валов), имеющих несоосную полость. В работах Н. М. Макдональда, Е. Вейнеля и Р. Морис [12–14] в разное время изучалось напряженное состояние классической задачи о кручении стержня, поперечное сечение которого ограничено двумя эксцентричными окружностями. Пользуясь методом Д. И. Шермана [4], напряженное состояние при кручении валов с несоосной эллиптической и квадратной полостями изучил Ю. А. Амензаде [8, 9]. Аналогичная задача о кручении кругового цилиндра, имеющего квадратную несоосную полость, методом конформного отображения была решена нами в работе [10].

В настоящей работе рассматривается задача кручения призматического стержня, поперечное сечение которого ограничено извне кривой, близкой к окружности, а изнутри — прямоугольником с закругленными углами, центр которого не совпадает с центром окружности.

Задача решается методом конформного отображения, причем предварительно строится функция, реализующая конформное отображение концентрического кольца в рассматриваемую двусвязную область способом, предложенным нами в работе [10].

§ 1. Известно, что конформное отображение внешности прямоугольной области на внутренность единичного круга $|\omega| < 1$ осуществляется функцией Кристоффеля-Шварца. При этом отображении окружности $|\omega| = R < 1$ переходят в овалообразные кривые, оси симметрии которых совпадают с осями симметрии прямоугольника, являющегося образом окружности $|\omega| = 1$ [3].

Если заменить интеграл Кристоффеля-Шварца полиномом, составленным из первых нескольких членов разложения этого интеграла в ряд, то при отображении этим полиномом окружности $|\omega| = R < 1$ перейдут также в овалообразные кривые, а образом окружности $|\omega| = 1$ становится прямоугольник со слабо вогнутыми сторонами и закругленными углами. Увеличением числа членов полинома, как показано Г. Н. Савиным [6] и другими, можно с требуемой точностью выпрямить стороны и уменьшить радиус закругления в углах этого прямоугольника.

Разложение отображающей функции Кристоффеля-Шварца в ряд дано в работах Г. Н. Савина [7] и О. М. Сапонджяна [5].

В качестве исходной функции для построения отображающей функции концентрического кольца в двусвязную область рассматриваемого поперечного сечения скручиваемого стержня воспользуемся полиномом

$$z = \Omega(w) = D \left[\frac{1}{w} + C_1 w + C_3 w^3 + \dots + C_{2n+1} w^{2n+1} \right], \quad (w = R e^{i\varphi}), \quad (1.1)$$

образованным из первых нескольких членов разложения функции Кристоффеля-Шварца в ряд, где

$$C_{2n+1} = -\frac{1}{n+1} [C_{2n-1} \cos 2x + C_{2n-3} \cos 4x + \dots + C_{-1} \cos (2n+2)x],$$

$$C_{-1} = -1 \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (1.2)$$

и параметр x зависит от отношения сторон прямоугольника.

Рекуррентная формула (1.2) для последовательного определения коэффициентов полинома (1.1) получена в вышеуказанной работе О. М. Сапонджяна.

Для того, чтобы окружности $|\zeta_1| = r < 1$ новой плоскости ζ_1 , начиная с некоторого значения $r_0 < 1$, переходили бы в кривые, близкие к окружности, и имели бы произвольное по отношению к прямоугольнику расположение, отличное от вышеописанного овалообразного, единичный круг $|w| \leq 1$, который полиномом (1.1) отображается на внешность прямоугольника с закругленными углами, отобразим на самого себя известной функцией

$$w = \frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha} \zeta_1}, \quad (\zeta_1 = r e^{i\varphi}), \quad (1.3)$$

где α — комплексный параметр ($|\alpha| < 1$).

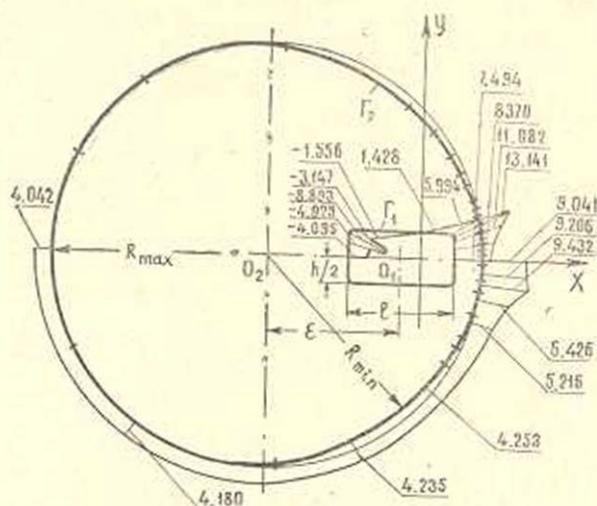
Подставив (1.3) в (1.1), получим

$$z = \Omega_1(\zeta_1) = D \left[\frac{1 - \bar{\alpha} \zeta_1}{\zeta_1 - \alpha} + C_1 \frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha} \zeta_1} + \right. \\ \left. + C_2 \left(\frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha} \zeta_1} \right)^3 + \dots + C_{2n+1} \left(\frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha} \zeta_1} \right)^{2n+1} \right]. \quad (1.4)$$

Так как отображение единичного круга на самого себя обладает свойством сохранения своей первоначальной границы, то образ окружности $|\zeta_1| = 1$ при отображении функцией (1.4) совпадет с образом окружности $|w| = 1$ при отображении полиномом (1.1), то есть тем же прямоугольником.

Однако, функция (1.4) имеет уже полюс в точке $\zeta_1 = \alpha$ в отличие от полюса $w = 0$ полинома (1.1) и поэтому образ окружности $|\zeta_1| = r_0 < 1$ станет иначе расположенным по отношению к прямо-

Таким образом, ряд Лорана (1.10), определенный в кольце $|\alpha| < |\zeta_1| \leq 1$, конформно отображает концентрическое кольцо $r_0 < |\zeta_1| \leq 1$, где $r_0 > |\alpha|$, на двусвязную область, ограниченную границами Γ_1 и Γ_2 , где Γ_1 — прямоугольник, а Γ_2 оказывается близкой к окружности, центр которой не совпадает с центром прямоугольника (фиг. 1).



Фиг. 1.

Близость кривой Γ_2 к окружности определяем следующим критерием: кривая Γ_2 будет близкой к окружности, если на окружности $|\zeta_1| = r_0$ удовлетворяется условие ее выпуклости [2]

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\zeta_1 \Omega_1'(\zeta_1)}{\Omega_1(\zeta_1)} \right] + 1 \geq 0, \quad (1.11)$$

и расстояния от образов дискретных точек $r_0 e^{i\varphi_k}$ до некоторой точки, принимаемой за центр этой приближенной окружности, будут мало отличаться друг от друга.

При решении задачи кручения рассматриваемого полого стержня в функции (1.10) будем ограничиваться полиномом, образованным первыми n_1 несколькими членами правильной и n_2 первыми несколькими членами главной части ряда (1.10), причём выбор n_1 и n_2 в зависимости от параметров α и r_0 произведем графическим построением кривых Γ_1 и Γ_2 .

§ 2. Решение задачи кручения призматического стержня, поперечное сечение которого представляет двусвязную область с границами Γ_1 и Γ_2 , сводится к интегрированию дифференциального уравнения [1]

$$\Delta^2 \Psi = -2 \quad (\Delta^2 \text{— оператор Лапласа}) \quad (2.1)$$

при следующих граничных условиях

$$\begin{aligned} \text{на } \Gamma_2 \quad \Psi &= 0, \\ \text{на } \Gamma_1 \quad \Psi &= C, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где C — постоянная, подлежащая определению.

Пользуясь комплексным представлением функции напряжений через комплексную функцию кручения [11]

$$\Psi = -\frac{i}{2} \left[\Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} - iz\bar{z} \right] \quad (2.3)$$

($z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$; $\Phi_1(z)$ — комплексная функция кручения) и учитывая, что полином

$$z = \omega(\zeta) = D \left[\sum_{k=1}^{n_1} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{n_2} D_{-k} \zeta^{-k} \right], \quad \text{где } \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

составленный из первых n_1 членов правильной и n_2 первых членов главной частей ряда (1.10), в котором ради удобства предварительно сделано преобразование $\zeta_1 = \frac{1}{\zeta}$ и введены обозначения

$$B_k = D_{-k}, \quad B_{-k} = D_k, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

отображает кольцо $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$ на двусвязную область, ограниченную внешне кривой Γ_2 , являющейся теперь уже образом окружности $|\zeta| = \rho_2$, а внутри образом окружности $|\zeta| = 1$ — прямоугольником Γ_1 , после подстановки (2.4) в (2.3), получим

$$\Psi = -\frac{i}{2} \left[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - i\omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} \right]. \quad (2.6)$$

Функцию $\Phi(\zeta)$, голоморфную в кольце $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$, будем искать в виде

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \text{где } a_k = b_k + ic_k. \quad (2.7)$$

Произведение $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$, фигурирующее в (2.6), на линиях $\rho = \text{const}$ разложим в ряд Фурье

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1} (P_k^2 + Q_k^2) \rho^{2k} + \sum_{k=1}^{n_2} (P_{-k}^2 + Q_{-k}^2) \rho^{-2k} \right], \\ \alpha_1 &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} (P_k P_{k+1} + Q_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n_2-1} (P_{-k} P_{-(k+1)} + Q_{-k} Q_{-(k+1)}) \rho^{-(2k+1)} \right], \\ \alpha_n &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-n} (P_k P_{k+n} + Q_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_1-n} (P_{-k} P_{-k-n} + Q_{-k} Q_{-k-n}) \rho^{-(2k+n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} P_{-k} + Q_{n-k} Q_{-k}) \rho^{n-2k} \Big],$$

$$(n = 2, 3, \dots, N);$$

$$\beta_1 = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} (Q_k P_{k+1} - P_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1-1} (P_{-k} Q_{-k-1} - Q_{-k} P_{-k-1}) \rho^{-(2k+1)} \right],$$

$$\beta_n = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-n} (Q_k P_{k+n} - P_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n_1-n} (P_{-k} Q_{-(k+n)} - Q_{-k} P_{-(k+n)}) \rho^{-(2k+n)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} Q_{-k} + Q_{n-k} P_{-k}) \rho^{n-2k} \right], \quad (n = 2, 3, \dots, N),$$

здесь $D_k = P_k + iQ_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) и $N = n_1 + n_2$.

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты α_n и β_n будут снабжены сверху индексом (1), а при $\rho = \rho_2$ — индексом (2).

Подставляя (2.7) в (2.6) с учетом (2.8) и удовлетворяя граничным условиям (2.2), получим

$$b_k = \frac{\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_k = \frac{\alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}},$$

$$b_{-k} = \frac{\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} \rho_2^k}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k^{(1)} \rho_2^k - \alpha_k^{(2)}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad (2.9)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$.

Для остальных $k > N$ $b_k = b_{-k} = c_k = c_{-k} = 0$. Входящая в (2.2) постоянная C и коэффициент a_0 , не влияющие на напряженное состояние, равны $C = \alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}$, $a_0 = i\alpha_0^{(2)}$.

§ 3. Крутящий момент, приложенный к основаниям стержня, равен

$$M = \tau K, \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, K — жесткость при кручении, которая определяется по формуле [11]

$$K = \frac{\mu\pi}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) - \sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(1)} A_{-n-1}^{(1)} + \lambda_{-n-1}^{(1)} A_n^{(1)}) \right] +$$

$$+ \mu\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(2)} - a_n \lambda_{-n}^{(2)}) - \sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(1)} - a_n \lambda_{-n}^{(1)}) \right]. \quad (3.2)$$

Здесь μ — модуль сдвига,

$$\lambda_0^{(j)} = 2\alpha_0^{(j)},$$

$$\lambda_n^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} - i\beta_n^{(j)}) \rho_j^{-n}, \quad \lambda_{-n}^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} + i\beta_n^{(j)}) \rho_j^n; \quad (3.3)$$

$$A_0^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} (k+1) \bar{D}_k D_{k+1} \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+1)} \rho_j^{-2(k+1)} \right],$$

$$A_n^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-n-1} (k+n+1) \bar{D}_k D_{k+n+1} \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1-n-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+n+1)} \rho_j^{-2(k+n+1)} + \sum_{k=1}^n k D_k \bar{D}_{-(n-k+1)} \rho_j^{-2(n-k+1)} \right],$$

$$[n = 1, 2, \dots, (N-1)],$$

$$A_{-1}^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1} k D_k \bar{D}_k \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1} k D_{-k} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right],$$

$$A_{-2}^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} k D_k \bar{D}_{k+1} \rho_j^{2(k+1)} - \sum_{k=1}^{n_1-1} (k+1) D_{-(k+1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right],$$

$$A_{-n}^{(j)} = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-n+1} k D_k \bar{D}_{k+n-1} \rho_j^{2(k+n-1)} - \sum_{k=1}^{n_1-n+1} (k+n-1) D_{-(k+n-1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} - \sum_{k=1}^{n-2} k D_{-k} \bar{D}_{n-k-1} \rho_j^{2(n-k-1)} \right], \quad (3.4)$$

$$(j = 1, 2), \quad [n = 3, 4, \dots, (N+1)].$$

Фигурирующие в этих выражениях коэффициенты $\alpha_n^{(j)}$ и $\beta_n^{(j)}$ ($j = 1, 2$) определяются по (2.8).

§ 4. Как известно [1], касательные напряжения при кручении определяются по формуле

$$\tau_\rho - i\tau_\theta = \mu\tau \frac{\zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} [\Phi'(\zeta) - i\overline{\omega'(\zeta)} \omega'(\zeta)]. \quad (4.1)$$

Как показано в [11], определяемые по (3.4) коэффициенты A_n , зависящие от ρ на линиях $\rho = \text{const}$ являются коэффициентами разложения в ряд функции $\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)$

$$\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta) = \sum_{-N}^N A_n \zeta^n, \quad (\zeta = \rho^2) \quad (4.2)$$

и при $\rho = \rho_j$ ($j = 1, 2$) эти коэффициенты суть $A_n^{(j)}$ ($j = 1, 2$), входящие в выражение жесткости (3.2).

Полагая $A_n = T_n + iS_n$ и учитывая (2.4) и (2.7), отделив действительные и мнимые части (4.1), получим

$$\tau_\rho = \frac{\mu\tau}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ \sum_{n=1}^N |(nb_n + S_{n-1}) \rho^{n-1} - (nb_{-n} - S_{-n-1}) \rho^{-n-1}| \cos n\theta + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^N [(T_{n-1} - nc_n) \rho^{n-1} - (T_{-n-1} + nc_{-n}) \rho^{-n-1}] \sin n\theta, \quad (4.3)$$

$$\tau_0 = \frac{\mu^2}{|w'(\zeta)|} \left\{ T_{-1} \rho^{-1} + \sum_{n=1}^N [(T_{n-1} - nc_n) \rho^{n-1} + (T_{-n-1} + nc_{-n}) \rho^{-n-1}] \times \right. \\ \left. \times \cos n\theta - \sum_{n=1}^N [(nb_n + S_{n-1}) \rho^{n-1} + (nb_{-n} - S_{-n-1}) \rho^{-n-1}] \sin n\theta \right\}. \quad (4.4)$$

§ 5. Рассмотрим численный пример. В качестве исходной функции (1.1) ограничимся полиномом

$$z = D \left[\frac{1}{w} + 0,309 w - 0,150747 w^3 - 0,027952 w^5 + \right. \\ \left. + 0,008439 w^7 - 0,009052 w^9 \right], \quad (5.1)$$

в котором коэффициенты получены по (1.2) при значении параметра $\alpha = 0,2\pi$.

Образ окружности $|w| = 1$ при отображении по (5.1) есть прямоугольник с отношением сторон $\frac{l}{h} = 2$, причем $h \approx 1,16D$, а образы окружностей $|w| = r < 1$ — вышеописанные овалобразные кривые. Полином девятой степени (5.1) обеспечивает незначительную закругленность углов прямоугольника и достаточную прямолинейность сторон. Отклонение сторон от прямолинейности не превышает 0,03D.

Подставив (1.3) в (5.1) при действительном значении параметра $\alpha = -0,3$, учитывая при этом (1.5), (1.7), (1.9), (2.5) и принимая в качестве внешней границы Γ_2 образ окружности $|\zeta| = 2,4$, ограничимся следующим полиномом в отображающей функции (2.4)

$$z = w(\zeta) = D \left(\sum_{k=1}^{18} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{12} D_{-k} \zeta^{-k} \right), \quad (5.2)$$

где

$$D_k = 0,91 \cdot (-0,3)^{k-1}, \\ \begin{array}{ll} D_{-1} = 0,243156 & D_{-7} = -0,026255 \\ D_{-2} = -0,191249 & D_{-8} = 0,019586 \\ D_{-3} = -0,038305 & D_{-9} = -0,007625 \\ D_{-4} = 0,054391 & D_{-10} = -0,000449 \\ D_{-5} = -0,039120 & D_{-11} = 0,002433 \\ D_{-6} = 0,025656 & D_{-12} = -0,001065. \end{array} \quad (5.3)$$

Так как коэффициенты D_k и D_{-k} при принятом действительном значении α действительны, то образами окружностей $|\zeta| = \rho < 1$ являются кривые, симметричные относительно действительной оси.

Построение образов окружностей $|\zeta| = \rho_1 = 1$ и $|\zeta| = \rho_2 = 2,4$ по полиному (5.2) с коэффициентами (5.3) показывает, что (фиг. 1):

1) образом окружности $|\zeta|=1$ является такой же прямоугольник Γ_1 с центром в точке $O_1(-0,393D, 0)$ и $h \approx 1,16D$, каким был образ окружности $|\omega|=1$ при отображении полиномом (5.1), что и следовало ожидать, так как полином (5.2) на окружности $|\zeta|=1$ приближенно, но с высокой точностью аппроксимирует функцию (5.1) на окружности $|\omega|=1$; отклонение сторон от прямолинейности также не превышает $0,03D$;

2) дискретные точки $z_2 = \omega(p_2 e^{i\theta})$ располагаются по кривой Γ_2 , близкой к окружности.

Принимая за центр этой приближенной окружности точку $O_2(-3,264D, 0)$ — середину отрезка действительной оси, отсекаемой кривой Γ_2 от этой оси, и сравнивая расстояния от этой точки до 20-ти точек, расположенных в верхней полуплоскости (эти точки на фиг. 1 показаны пересечением кривой Γ_2 черточками), видим, что максимальная разница между этими расстояниями не превышает $4,35\%$ ($R_{\max} = 4,609D$, $R_{\min} = 4,4D$). Кроме того, на окружности $p_2 = 2,4$ удовлетворяется условие выпуклости (1.11) кривой Γ_2 . Поэтому с известным приближением считаем кривую Γ_2 приближенной окружностью. Расстояние между центрами этой окружности Γ_2 и прямоугольника Γ_1 равно $z = 2,871D$.

Жесткость рассматриваемого сечения, сосчитанная по формуле (3.2), равна $K = 130,01 \mu\pi D^4$.

Эпюры касательных напряжений $\tau_z/\mu z D$ по контурам Γ_1 и Γ_2 сечения приведены на фиг. 1.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 23 VI 1964

Ա. Կ. ԶԱՐԿԱՆՅԱՆ

ՈՉ ՀԱՄԱՌԱՍՆՅՔ ՌԻԳԱՆԿՅԱՆԻ ԽՈՌՈՉ ՈՐԵՆՅՈՂ ԼԻՍՆԻՒ ՈՂՈՐԱԽՄԸ

Ա. մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը, որի լայնական կտրվածքը արտաքինից սահմանափակված է շրջանազծին բավականաչափ մոտ կտրով, իսկ ներսից՝ կլորացված անկյունների ունեցող ուղղանկյունով, որի կենտրոնը չի համընկնում շրջանազծի կենտրոնի հետ:

Խնդիրը լուծված է կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդով, ըստ որում համակենտրոն օղակը դիտարկվող նրկկաղ տիրույթի վրա արտապատկերող ֆունկցիան կառուցվում է [10] աշխատության մեջ առաջարկված եղանակով:

Որպես թվային օրինակ լուծված է $\frac{l}{h} = 2$, $z = 2,871D$ և $R_{\max} = 4,609D$

պարամետրերով կտրվածք ունեցող ձողի ոլորման խնդիրը: Հաշվված է այդ ձողի կոշտութունը և կառուցված են կտրվածքի եզրագծերի համար շոշափոխ լարումների էպյուրները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960.
3. Лаврентьев М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. Гостехтеориздат, М.—Л., 1946.
4. Шерман Д. И. Об одной задаче кручения. ДАН СССР, **63**, № 5, 1948.
5. Сапоноженя О. М. К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля-Шварца. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, **9**, № 9, 1956.
6. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
7. Савин Г. Н. Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, сообщение 10, 1936.
8. Амензаде Ю. А. Местные напряжения при кручении круглого призматического бруса с эллиптическим несоосным отверстием. ДАН СССР, **119**, № 6, 1958.
9. Амензаде Ю. А. Об одной задаче нестесненного кручения. Инженерный журнал АН СССР, **3**, в. 2, 1963.
10. Заргарян С. С. Кручение кругового цилиндра, имеющего несоосную многогранную полость. ДАН Арм.ССР, **39**, № 4, 1964.
11. Заргарян С. С. Кручение призматических стержней полигонального поперечного сечения с произвольно расположенной круговой цилиндрической полостью. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, **17**, № 2, 1964.
12. Macdonald H. M. On the torsional strength of a hollow shaft. Proc. Cambridge Philosoph. Soc., **8**, 1893.
13. Weinel E. Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisring. Ingenieur Archiv, **3**, 1932.
14. Morris Rosa. Some general solutions of Saint—Venant's torsion and flexure problem, II and III. Proc. London Math. Soc., (2) **51**, 1949.