

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблян, С. М. Саакян

О ДВУХ ЗАДАЧАХ О РАВНОВЕСИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА СО СМЕШАННЫМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях была поставлена Ламе [4] в 1852 году. Он указал на важность этой задачи для практических приложений и вместе с тем отметил особую ее трудность.

Однако, задача эта до сего времени не получила полного решения. Известны некоторые приближенные решения частных случаев задачи Ламе.

Численным методом С. П. Тимошенко решил плоскую задачу о сжатии параллелепипеда двумя жесткими плитами с полным трением по поверхностям контакта [5]. К. Хагер рассмотрел задачу о равномерном сжатии прямоугольной призмы [6]. Задача о сжатии параллелепипеда жесткими плитами при неполном трении приближенно решена Л. Фешлом [7]. Пользуясь вариационным методом Кастильяно, М. М. Филоненко-Бородич решил некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда [1—3]. Тем же методом некоторые задачи о стесненном кручении упругого параллелепипеда рассмотрены в работах В. Н. Нетребко [11] и М. И. Мешкова [10, 17].

Точные решения для некоторых смешанных задач о равновесии упругого параллелепипеда были получены в работах Г. М. Валова [8], Б. Ф. Власова [9], В. В. Вишнякова [16], Мелконяна [13], Теодореску [15], Мишонова [14] и других. Задаче о равновесии параллелепипеда посвящена также работа Э. Н. Байды [12].

В настоящей работе дается точное решение двух задач о равновесии упругого параллелепипеда со следующими смешанными граничными условиями:

а) на плоскостях параллелепипеда $z=0$, $z=c$ заданы касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и нормальное перемещение w , а на остальной части поверхности параллелепипеда нагрузка задана компонентами напряжения;

б) на боковых плоскостях параллелепипеда $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ заданы соответствующие касательные напряжения и нормальные перемещения, а на плоскостях $z=0$, $z=c$ заданы напряжения. Подобная задача, с нулевыми условиями на боковых поверхностях была решена Г. М. Валовым [8].

Пользуясь методом Фурье, решения уравнений равновесия в форме Ламе представляются в виде суммы трех двойных рядов Фурье.

Определение неизвестных коэффициентов в первой задаче сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти бесконечные системы квази-регулярные и имеют ограниченные сверху и стремящиеся (порядка $\frac{1}{m^2 n}$ или $\frac{1}{l^2 n}$) к нулю свободные члены, когда m , n и l стремятся к бесконечности. Вторая задача решается без применения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

§ 1. Решение однородных уравнений Ламе

$$\begin{aligned}\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$

ищем в виде суммы двойных рядов Фурье

$$\begin{aligned}u &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(1)}(y) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{lm}^{(1)}(z) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\ v &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(2)}(x) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{lm}^{(2)}(z) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \\ w &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(3)}(x) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}^{(3)}(y) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{lm}^{(3)}(z) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,\end{aligned}\quad (1.2)$$

где

$$\alpha_l = \frac{l\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{c}.$$

Так как при отсутствии объемных сил перемещения являются бигармоническими функциями, то функции $f_{mn}^{(i)}(x)$, $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$, $\psi_{lm}^{(i)}(z)$ ($i=1, 2, 3$) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 f_{mn}^{(i)}(x) &= A_{mn}^{(i)} \operatorname{sh} k_{mn} x + B_{mn}^{(i)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{mn}^{(i)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(i)} k_{mn} x \operatorname{ch} k_{mn} x, \\
 \varphi_{ln}^{(i)}(y) &= M_{ln}^{(i)} \operatorname{sh} k_{ln} y + N_{ln}^{(i)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y, \\
 \psi_{lm}^{(i)}(z) &= K_{lm}^{(i)} \operatorname{sh} k_{lm} z + L_{lm}^{(i)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z + G_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z,
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$k_{mn}^2 = \beta_m^2 + \gamma_n^2, \quad k_{ln}^2 = \alpha_l^2 + \gamma_n^2, \quad k_{lm}^2 = \alpha_l^2 + \beta_m^2.$$

Между 36 постоянными коэффициентами, входящими в (1.3), существует зависимость. Удовлетворив уравнениям (1.1), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 k_{mn} A_{mn}^{(1)} + (2\gamma_1 + 1) k_{mn} D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} &= 0, \\
 k_{mn} B_{mn}^{(1)} + (2\gamma_1 + 1) k_{mn} C_{mn}^{(1)} + \beta_m A_{mn}^{(2)} + \gamma_n A_{mn}^{(3)} &= 0, \\
 k_{mn} D_{mn}^{(3)} + \gamma_n C_{mn}^{(1)} = 0, & \quad k_{mn} C_{mn}^{(2)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0, \\
 \beta_m D_{mn}^{(3)} = \gamma_n D_{mn}^{(2)}, & \quad \beta_m C_{mn}^{(3)} = \gamma_n C_{mn}^{(2)};
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
 k_{ln} M_{ln}^{(2)} + (2\gamma_1 + 1) k_{ln} F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} &= 0, \\
 k_{ln} N_{ln}^{(2)} + (2\gamma_1 + 1) k_{ln} E_{ln}^{(2)} + \alpha_l M_{ln}^{(1)} + \gamma_n M_{ln}^{(3)} &= 0, \\
 \gamma_n E_{ln}^{(2)} + k_{ln} F_{ln}^{(3)} = 0, & \quad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln} E_{ln}^{(3)} = 0, \\
 \gamma_n F_{ln}^{(1)} = \alpha_l F_{ln}^{(3)}, & \quad \gamma_n E_{ln}^{(1)} = \alpha_l E_{ln}^{(3)};
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 k_{lm} K_{lm}^{(3)} + (2\gamma_1 + 1) k_{lm} G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m L_{lm}^{(2)} &= 0, \\
 k_{lm} L_{lm}^{(3)} + (2\gamma_1 + 1) k_{lm} H_{lm}^{(3)} + \alpha_l K_{lm}^{(1)} + \beta_m K_{lm}^{(2)} &= 0, \\
 \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} = 0, & \quad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} = 0, \\
 \alpha_l H_{lm}^{(2)} = \beta_m H_{lm}^{(1)}, & \quad \alpha_l G_{lm}^{(2)} = \beta_m G_{lm}^{(1)},
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\gamma_1 = 1 - 2\nu.$$

Отсюда видно, что число неизвестных коэффициентов, входящих в (1.3), равно 18.

Пользуясь обычными формулами, для компонентов напряжения получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{G} \tau_{yz} &= b_3 + c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m f_{mn}^{(3)} + \gamma_n f_{mn}^{(2)}) \sin \beta_m y \sin \gamma_n z + \\
 &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(3)}}{dy} - \gamma_n \varphi_{ln}^{(2)} \right) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \\
 &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(2)}}{dz} - \beta_m \psi_{lm}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G} \tau_{xy} &= a_2 + b_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(2)}}{dx} - \beta_m f_{mn}^{(1)} \right) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(1)}}{dy} - \alpha_l \varphi_{ln}^{(2)} \right) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z - \\
&- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_l \varphi_{lm}^{(2)} + \beta_m \varphi_{lm}^{(1)}) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y, \\
\frac{1}{G} \tau_{xz} &= c_1 + a_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(3)}}{dx} - \gamma_n f_{mn}^{(1)} \right) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z - \\
&- \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_l \varphi_{ln}^{(3)} + \gamma_n \varphi_{ln}^{(1)}) \sin \alpha_l x \sin \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(1)}}{dz} - \alpha_l \psi_{lm}^{(3)} \right) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\
A\sigma_x &= \eta' a_1 + b_2 + c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\eta' \frac{df_{mn}^{(1)}}{dx} + \beta_m f_{mn}^{(2)} + \gamma_n f_{mn}^{(3)} \right) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(2)}}{dy} + \eta' \alpha_l \varphi_{ln}^{(1)} + \gamma_n \varphi_{ln}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(3)}}{dz} + \eta' \alpha_l \psi_{lm}^{(1)} + \beta_m \psi_{lm}^{(2)} \right) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \quad (1.7) \\
A\sigma_y &= a_1 + \eta' b_2 + c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(1)}}{dx} + \eta' \beta_m f_{mn}^{(2)} + \gamma_n f_{mn}^{(3)} \right) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\eta' \frac{d\varphi_{ln}^{(2)}}{dy} + \alpha_l \varphi_{ln}^{(1)} + \gamma_n \varphi_{ln}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(3)}}{dz} + \alpha_l \psi_{lm}^{(1)} + \eta' \beta_m \psi_{lm}^{(2)} \right) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \\
A\sigma_z &= a_1 + b_2 + \eta' c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(1)}}{dx} + \beta_m f_{mn}^{(2)} + \eta' \gamma_n f_{mn}^{(3)} \right) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(2)}}{dy} + \alpha_l \varphi_{ln}^{(1)} + \eta' \gamma_n \varphi_{ln}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\eta' \frac{d\psi_{lm}^{(3)}}{dz} + \beta_m \psi_{lm}^{(2)} + \alpha_l \psi_{lm}^{(1)} \right) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1 - 2\nu}{2\nu G}, \quad \eta' = \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

§ 2. Граничные условия для задачи (а) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{xy}(0, y, z) &= f_1(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xy}(a, y, z) &= f_1^{(1)}(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a'_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xz}(0, y, z) &= f_2(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xz}(a, y, z) &= f_2^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b'_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xy}(x, 0, z) &= f_3(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xy}(x, b, z) &= f_3^{(1)}(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c'_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, 0, z) &= f_4(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, b, z) &= f_4^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d'_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, 0) &= f_5(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, c) &= f_5^{(1)}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e'_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, 0) &= f_6(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, c) &= f_6^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h'_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \\ w(x, y, 0) &= f_7(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) &= f_7^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y; \\
 A z_x(0, y, z) &= f_8(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z, \\
 A z_x(a, y, z) &= f_8^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn}^* \cos \beta_m y \cos \gamma_n z, \\
 A z_y(x, 0, z) &= f_9(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z, \\
 A z_y(x, b, z) &= f_9^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ln}^* \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из граничных условий (2.1) для касательных напряжений и нормальных перемещений получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{df_{mn}^{(2)}(0)}{dx} - \beta_m f_{mn}^{(1)}(0) &= a_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(1)}(0)}{dy} - \alpha_l \varphi_{ln}^{(2)}(0) &= c_{ln}, \\
 \frac{df_{mn}^{(2)}(a)}{dx} - \beta_m f_{mn}^{(1)}(a) &= a_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(1)}(b)}{dy} - \alpha_l \varphi_{ln}^{(2)}(b) &= c_{ln}, \\
 \frac{df_{mn}^{(3)}(0)}{dx} - \gamma_n f_{mn}^{(1)}(0) &= b_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(3)}(0)}{dy} - \gamma_n \varphi_{ln}^{(2)}(0) &= d_{ln}, \\
 \frac{df_{mn}^{(3)}(a)}{dx} - \gamma_n f_{mn}^{(1)}(a) &= b_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(3)}(b)}{dy} - \gamma_n \varphi_{ln}^{(2)}(b) &= d_{ln}, \\
 \frac{d\psi_{lm}^{(1)}(0)}{dz} - \alpha_l \psi_{lm}^{(3)}(0) &= e_{lm}, & \frac{d\psi_{lm}^{(2)}(0)}{dz} - \beta_m \psi_{lm}^{(3)}(0) &= h_{lm}, \\
 \frac{d\psi_{lm}^{(1)}(c)}{dz} - \alpha_l \psi_{lm}^{(3)}(c) &= e_{lm}, & \frac{d\psi_{lm}^{(2)}(c)}{dz} - \beta_m \psi_{lm}^{(3)}(c) &= h_{lm}, \\
 \psi_{lm}^{(3)}(0) &= f_{lm}, & \psi_{lm}^{(3)}(c) &= f_{lm}.
 \end{aligned} \quad (2.3) \quad (2.4)$$

Из соотношений (1.4) и (2.2), (1.5) и (2.3), (1.6) и (2.4) некоторые из постоянных интегрирования определяются непосредственно, другие выражаются через постоянные $C_{mn}^{(3)}$, $D_{mn}^{(3)}$, $E_{ln}^{(3)}$ и $F_{ln}^{(3)}$.

Исключая найденные постоянные, заменяя далее другие их выражениями через $C_{mn}^{(3)}$, $D_{mn}^{(3)}$, $E_{ln}^{(3)}$ и $F_{ln}^{(3)}$ и удовлетворяя затем последним 4 условиям из (2.1), для определения коэффициентов $D_{mn}^{(3)}$, $C_{mn}^{(3)}$, $E_{ln}^{(3)}$ и $F_{ln}^{(3)}$ получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
Z_{mn} &= \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} a_{lmn} X_{ln} + b_{mn}, & \begin{pmatrix} m=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
Z_{mn} &= \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} a_{lmn} Y_{ln} + b_{mn}, & \begin{pmatrix} m=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
U_{mn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} X_{ln} + d_{mn}, & \begin{pmatrix} m=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
U_{mn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} Y_{ln} + d_{mn}, & \begin{pmatrix} m=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
X_{ln} &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} e_{lmn} Z_{mn} + h_{ln}, & \begin{pmatrix} l=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
X_{ln} &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} e_{lmn} U_{mn} + h_{ln}, & \begin{pmatrix} l=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
Y_{ln} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} g_{lmn} Z_{mn} + f_{ln}, & \begin{pmatrix} l=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
Y_{ln} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} g_{lmn} U_{mn} + f_{ln}, & \begin{pmatrix} l=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} k_{ln} (E_{ln}^{(3)} \operatorname{sh} k_{ln} b + F_{ln}^{(3)} \operatorname{ch} k_{ln} b - F_{ln}^{(3)}) &= X_{ln}, \\
\frac{a}{b} k_{ln} (E_{ln}^{(3)} \operatorname{sh} k_{ln} b + F_{ln}^{(3)} \operatorname{ch} k_{ln} b + F_{ln}^{(3)}) &= Y_{ln},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\frac{b}{a} k_{mn} (C_{mn}^{(3)} \operatorname{sh} k_{mn} a + D_{mn}^{(3)} \operatorname{ch} k_{mn} a - D_{mn}^{(3)}) = Z_{mn},$$

$$\frac{b}{a} k_{mn} (C_{mn}^{(3)} \operatorname{sh} k_{mn} a + D_{mn}^{(3)} \operatorname{ch} k_{mn} a + D_{mn}^{(3)}) = U_{mn};$$

$$\begin{aligned}
a_{lmn} &= -\frac{8}{ak_{mn}} \frac{(-1)^m \operatorname{sh}^2 k_{mn} a}{(\operatorname{ch} k_{mn} a + 1)(\operatorname{sh} k_{mn} a + k_{mn} a)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{ln}^2 + (\alpha_l^2 + \nu_{ln}^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2}, \\
c_{lmn} &= -\frac{8}{ak_{mn}} \frac{(-1)^m \operatorname{sh}^2 k_{mn} a}{(\operatorname{ch} k_{mn} a - 1)(\operatorname{sh} k_{mn} a - k_{mn} a)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{ln}^2 + (\alpha_l^2 + \nu_{ln}^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2}, \\
e_{lmn} &= -\frac{8}{bk_{ln}} \frac{(-1)^l \operatorname{sh}^2 k_{ln} b}{(\operatorname{ch} k_{ln} b + 1)(\operatorname{sh} k_{ln} b + k_{ln} b)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{mn}^2 + (\beta_m^2 + \nu_{ln}^2) \alpha_l^2}{(k_{mn}^2 + \alpha_l^2)^2}, \\
g_{lmn} &= -\frac{8}{bk_{ln}} \frac{(-1)^l \operatorname{sh}^2 k_{ln} b}{(\operatorname{ch} k_{ln} b - 1)(\operatorname{sh} k_{ln} b - k_{ln} b)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{mn}^2 + (\beta_m^2 + \nu_{ln}^2) \alpha_l^2}{(k_{mn}^2 + \alpha_l^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& a \frac{(1 + \operatorname{ch} k_{mn} a) (\operatorname{sh} k_{mn} a + k_{mn} a)}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} b_{mn} = \\
& = \frac{\gamma_n (1 + \operatorname{ch} k_{mn} a)}{2k_{mn}^2 \operatorname{sh} k_{mn} a} \left[\beta_m (a'_{mn} - a_{mn}) + \gamma_n (b'_{mn} - b_{mn}) - \right. \\
& - \frac{2\gamma_n}{bk_{mn} l=2,4,\dots} \sum_{l=2,4,\dots} \frac{(-1)^m}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \left\{ \frac{\alpha_l (k_{ln}^2 + \gamma_n^2)}{k_{ln}^2} [c'_{ln} - (-1)^m c_{ln}] - \right. \\
& - \frac{\gamma_n \alpha_l^2}{k_{ln}^2} [d'_{ln} - (-1)^n d_{ln}] \left. \right\} + \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{(\gamma' - 1) k_{mn} l=2,4,\dots} \sum_{l=2,4,\dots} \frac{k_{lm} (-1)^n}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\gamma' \alpha_l^2 + k_{mn}^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \right. \\
& - \frac{\gamma' \alpha_l^2 + \beta_m^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - (-1)^n f_{lm}] - \frac{\gamma' \alpha_l}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] - \\
& - \frac{\beta_m}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] \left. \right\} + \frac{\gamma_n}{(\gamma' - 1) k_{mn}} (g'_{mn} + g_{mn}); \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a \frac{(\operatorname{ch} k_{mn} a - 1) (\operatorname{sh} k_{mn} a - k_{mn} a)}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} d_{mn} = \frac{\gamma_n (\operatorname{ch} k_{mn} a - 1)}{2k_{mn}^2 \operatorname{sh} k_{mn} a} \times \\
& \times [\beta_m a'_{mn} + \gamma_n b'_{mn} + \beta_m a_{mn} + \gamma_n b_{mn}] + \frac{2\gamma_n}{bk_{mn} l=1,3,\dots} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{(-1)^m}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{\alpha_l (k_{ln}^2 + \gamma_n^2)}{k_{ln}^2} [c'_{ln} - (-1)^m c_{ln}] - \frac{\gamma_n \alpha_l^2}{k_{ln}^2} [d'_{ln} - (-1)^m d_{ln}] \right\} - \\
& - \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{(\gamma' - 1) k_{mn} l=1,3,\dots} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{(-1)^n k_{lm}}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\gamma' \alpha_l^2 + k_{mn}^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \frac{\gamma' \alpha_l^2 + \beta_m^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - \\
& - (-1)^m f_{lm}] - \frac{\gamma' \alpha_l}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] - \frac{\beta_m}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] + \\
& + \frac{\gamma_n}{k_{mn} (\gamma' - 1)} (g'_{mn} - g_{mn}); \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b \frac{(1 + \operatorname{ch} k_{ln} b) (\operatorname{sh} k_{ln} b + k_{ln} b)}{\operatorname{sh}^2 k_{ln} b} h_{ln} = \frac{\gamma_n (1 + \operatorname{ch} k_{ln} b)}{2k_{ln}^2 \operatorname{sh} k_{ln} b} [\alpha_l (c'_{ln} - c_{ln}) + \\
& + \gamma_n (d'_{ln} - d_{ln})] - \frac{2\gamma_n}{ak_{ln} m=2,4,\dots} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{(-1)^l}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{\beta_m (k_{mn}^2 + \gamma_n^2)}{k_{mn}^2} [a'_{mn} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^i a_{mn}] - \frac{\gamma_n \beta_m^2}{k_{mn}^2} [b'_{mn} - (-1)^i b_{mn}] \Big\} + \\
& + \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{(\eta' - 1) k_{ln}} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{k_{lm} (-1)^n}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\eta' a_l^2 + k_{lm}^2)}{\beta_m (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \frac{\eta' \beta_m^2 + a_l^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - \\
& - (-1)^n f_{lm}] - \frac{\eta' \beta_m}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] - \frac{\alpha_l}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] \Big\} + \\
& + \frac{\gamma_n}{k_{ln} (\eta' - 1)} (p_{ln} + p'_{ln}); \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b \frac{(\operatorname{ch} k_{ln} b - 1) (\operatorname{sh} k_{ln} b - k_{ln} b)}{\operatorname{sh}^2 k_{ln} b} f_{ln} = \frac{\gamma_n (\operatorname{ch} k_{ln} b - 1)}{2k_{ln}^2 \operatorname{sh} k_{ln} b} [\alpha_l (c'_{ln} - c_{ln}) + \\
& + \gamma_n (d'_{ln} - d_{ln})] + \frac{2\gamma_n}{ak_{ln}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^i}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{\beta_m (k_{mn}^2 + \gamma_n^2)}{k_{mn}^2} [a'_{mn} - \right. \\
& - (-1)^i a_{mn}] - \frac{\gamma_n \beta_m}{k_{mn}^2} [a'_{mn} - (-1)^i a_{mn}] \Big\} - \\
& - \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{k_{ln} (\eta' - 1)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n k_{lm}}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\eta' \beta_m^2 + k_{lm}^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \frac{\eta' \beta_m^2 + a_l^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - \\
& - (-1)^n f_{lm}] - \frac{\eta' \beta_m}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] - \frac{\alpha_l}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] \Big\} + \\
& + \frac{\gamma_n}{k_{ln} (\eta' - 1)} (p'_{ln} - p_{ln}), \quad (2.11)
\end{aligned}$$

При удовлетворении граничным условиям получаются еще и следующие равенства:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{c'_{l0} - c_{l0}}{\alpha_l b} + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e'_{l0} - e_{l0}}{\alpha_l c} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} (g'_{00} - g_{00}), \\
& \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a'_{m0} - a_{m0}}{\alpha_m^2} + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{h'_{m0} - h_{m0}}{c_m^2} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} (p'_{00} - p_{00}). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Эти равенства являются уравнениями равновесия внешних сил, действующих на поверхности параллелепипеда по направлениям осей X и Y ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$). Коэффициенты c_0 , c_2 , a_1 , b_2 будут определены из соотношений

$$\begin{aligned}
\eta' a_1 + b_1 + c_1 &= \frac{g_{00} + g'_{00}}{2} + \frac{1-2\nu}{2\nu} \left[\sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{c_{l0} - c'_{l0}}{a a_l} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{e_{l0} - e'_{l0}}{c a_l} \right], \\
a_1 + b_1 \eta' + c_1 &= \frac{p_{00} + p'_{00}}{2} + \frac{1-2\nu}{2\nu} \left[\sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \frac{a_{m0} - a'_{m0}}{a^2_{l'm}} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \frac{h_{m0} - h'_{m0}}{c^2_{\beta m}} \right], \\
c_0 &= \frac{f_{00}}{4}, \quad c_0 + c c_2 = \frac{f'_{00}}{4}.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Докажем, что бесконечные системы (2.5) квази-регулярные. Вычислим суммы модулей коэффициентов при неизвестных.

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} |a_{lmn}| &= \frac{8}{a k_{mn}} \frac{\text{sh}^2 k_{mn} a}{(\text{ch } k_{mn} a + 1)(\text{sh } k_{mn} a + k_{mn} a)} \times \\
&\quad \times \sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{\nu \gamma_n^2 k_{ln}^2 + (x_l^2 + \nu \gamma_n^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2} = \\
&= \left[1 - \frac{\frac{(1-2\nu) \gamma_n^2}{k_{mn}^2} - \frac{4\nu \gamma_n^2}{a k_{mn}} \text{th} \frac{a k_{mn}}{2} + \frac{a(k_{mn}^2 + \beta_m^2)}{k_{mn} \text{sh } k_{mn} a}}{1 + \frac{a k_{mn}}{\text{sh } k_{mn} a}} \right] < 1, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} |c_{lmn}| &= \frac{8}{a k_{mn}} \frac{\text{sh}^2 k_{mn} a}{(\text{ch } k_{mn} a - 1)(\text{sh } k_{mn} a - k_{mn} a)} \times \\
&\quad \times \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\nu \gamma_n^2 k_{ln}^2 + (x_l^2 + \nu \gamma_n^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2} = \\
&= \frac{1}{1 - \frac{a k_{mn}}{\text{sh } k_{mn} a}} \left[1 - \frac{(1-2\nu) \gamma_n^2}{k_{mn}^2} + \frac{a \beta_m^2}{k_{mn} \text{sh } k_{mn} a} \right]. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

При фиксированном значении параметров m или n последнее выражение становится меньше единицы, начиная с некоторого значения n или m , которое имеет место при удовлетворении следующего неравенства:

$$\frac{1-2\nu}{2 \frac{\beta_m^2}{\gamma_n^2} + 1} > \frac{a k_{mn}}{\text{sh } k_{mn} a}; \quad (2.16)$$

аналогичным образом получим

$$\sum_{m=0, 2, \dots}^{\infty} |e_{lmn}| < 1,$$

$$\sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} |g_{lmn}| = \frac{1}{1 - \frac{k_{ln}b}{\operatorname{sh} k_{ln}b}} \left[1 - \frac{(1-2\nu) \gamma_n^2}{k_{ln}^2} + \frac{ba_l^2}{k_{ln} \operatorname{sh} k_{ln}b} \right]. \quad (2.17)$$

При фиксированном значении параметров n или l последнее выражение становится меньше единицы, начиная с некоторого значения l или n , которое имеет место при удовлетворении следующего неравенства

$$\frac{1-2\nu}{2 \frac{a_l^2}{\gamma_n^2} + 1} > \frac{bk_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b}. \quad (2.18)$$

Таким образом, системы (2.5) оказались квази-регулярными. Если примем, что в соответствующих областях изменения граничные функции $f_i, f_i^{(1)}$ — непрерывные, а функции $f_i, f_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$) — кусочно-непрерывные, то легко видеть, что свободные члены систем (2.5) b_{mn} и d_{mn} будут стремиться к нулю как $O\left(\frac{1}{m^2n}\right)$, а h_{ln} и f_{ln} — как $O\left(\frac{1}{l^2n}\right)$.

Если в системах (2.5) исключить неизвестные X_{ln} и Y_{ln} , то для определения неизвестных Z_{mn} и U_{mn} получим следующие бесконечные системы

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \sum_{p=0, 2, \dots}^{\infty} \bar{a}_{pmn} Z_{pn} + \bar{b}_{mn} \quad (m = 0, 2, 4, \dots), \\ Z_{mn} &= \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \bar{c}_{pmn} Z_{pn} + \bar{d}_{mn} \quad (m = 1, 3, \dots), \\ U_{mn} &= \sum_{p=0, 2, \dots}^{\infty} \bar{e}_{pmn} U_{pn} + \bar{h}_{mn} \quad (m = 0, 2, \dots), \\ U_{mn} &= \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \bar{g}_{pmn} U_{pn} + \bar{f}_{mn} \quad (m = 1, 3, \dots), \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}_{pmn} &= \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} e_{lpn}, & \bar{b}_{mn} &= b_{mn} + \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} h_{ln}, \\ \bar{c}_{pmn} &= \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} g_{lpn}, & \bar{d}_{mn} &= d_{mn} + \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} f_{ln}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{pmn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} e_{lpm}, & \bar{h}_{mn} &= d_{mn} + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} h_{ln}, \\ \bar{g}_{lmn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} g_{lpm}, & \bar{f}_{mn} &= d_{mn} + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} f_{ln}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В бесконечных системах (2.19) неизвестные постоянные $Z_{2k,n}$, $Z_{2k+1,n}$, $U_{2k,n}$ и $U_{2k+1,n}$ разделяются, то есть они определяются независимо друг от друга. Используя неравенства (2.14)–(2.18) и обозначения (2.20), легко доказать, что новые системы (2.19) также квазирегулярны, а свободные члены этих систем ограничены сверху и стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{m^2 n}\right)$, и $O\left(\frac{1}{l^2 n}\right)$.

§ 3. Рассмотрим теперь задачу об изгибе толстой прямоугольной плиты, когда на боковых поверхностях заданы касательные напряжения и нормальные перемещения, а на верхней и нижней плоскостях — напряжения. Граничные условия для задачи имеют вид

$$u(0, y, z) = f_1(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$u(a, y, z) = f_1^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a'_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$v(x, 0, z) = f_2(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$v(x, b, z) = f_2^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b'_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xy}(0, y, z) = f_3(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xy}(a, y, z) = f_3^{(1)}(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c'_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(x, 0, z) = f_4(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(x, b, z) = f_4^{(1)}(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d'_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(0, y, z) = f_5(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(a, y, z) = f_5^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e'_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(x, y, 0) = f_6(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(x, y, c) = f_6^{(1)}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f'_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, 0, z) = f_7(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, b, z) = f_7^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g'_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, 0) = f_8(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, c) = f_8^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h'_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y,$$

$$A\sigma_z(x, y, 0) = f_9(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

$$A\sigma_z(x, y, c) = f_9^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p'_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1) и решая полученную систему линейных алгебраических уравнений вместе с системами (1.5–1.7), для определения неизвестных коэффициентов получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} D_{mn}^{(2)} &= \frac{\beta_m}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)}, & C_{mn}^{(1)} &= -\frac{k_{mn}}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)}, & A_{mn}^{(3)} &= \frac{e_{mn} + \gamma_n a_{mn}}{k_{mn}} - D_{mn}^{(3)}, \\ C_{mn}^{(2)} &= -\frac{\beta_m}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{mn} a D_{mn}^{(3)} + \frac{\bar{D}_{mn}}{\operatorname{sh} k_{mn} a}, & B_{mn}^{(1)} &= a_{mn}, \\ A_{mn}^{(1)} &= -\frac{ak_{mn}^2}{\gamma_n} \frac{D_{mn}^{(3)}}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} + \frac{ak_{mn}^2 \operatorname{ch} k_{mn} a}{\beta_m \operatorname{sh}^2 k_{mn} a} \bar{D}_{mn} - a_{mn} \operatorname{cth} k_{mn} a, \\ B_{mn}^{(2)} &= \frac{\beta_m}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)} \left(\operatorname{cth} k_{mn} a + \frac{ak_{mn}}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} \right) - \frac{\bar{D}_{mn}}{\operatorname{sh} k_{mn} a} (1 + ak_{mn} \operatorname{cth} k_{mn} a) - \\ &\quad - \frac{e_{mn} + \beta_m a_{mn}}{k_{mn}} \operatorname{cth} k_{mn} a + \frac{e'_{mn} + \beta_m a'_{mn}}{k_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
B_{mn}^{(3)} &= D_{mn}^{(3)} \left(\frac{ak_{mn}}{\operatorname{sh}^2 k_{mn}a} + \operatorname{cth} k_{mn}a \right) - \frac{\gamma_n}{\beta_m \operatorname{sh} k_{mn}a} \bar{D}_{mn} (1 + ak_{mn} \operatorname{cth} k_{mn}a) + \\
&\quad + \frac{e'_{mn} + \gamma_n a'_{mn}}{k_{mn} \operatorname{sh} k_{mn}a} - \frac{e_{mn} + \gamma_n a_{mn}}{k_{mn}} \operatorname{cth} k_{mn}a, \\
C_{mn}^{(3)} &= -\operatorname{cth} k_{mn}a D_{mn}^{(3)} + \frac{\gamma_n}{\beta_m \operatorname{sh} k_{mn}a} \bar{D}_{mn}, \\
D_{mn}^{(1)} &= \frac{k_{mn}}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{mn}a D_{mn}^{(3)} - \frac{k_{mn}}{\beta_m \operatorname{sh} k_{mn}a} \bar{D}_{mn}, \\
A_{mn}^{(2)} &= \frac{e_{mn} + \beta_m a_{mn}}{k_{mn}} - \frac{\beta_m}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\begin{cases} D_{mn}^{(3)} = \frac{\gamma_n}{2(\eta+1)k_{mn}^2} \left(2k_{mn}a_{mn} + \frac{\beta_m e_{mn} + \gamma_n e'_{mn}}{k_{mn}} \right), \\ \bar{D}_{mn} = \frac{\beta_m}{2(\eta+1)k_{mn}} \left(2a'_{mn} + \frac{\beta_m e'_{mn} + \gamma_n e_{mn}}{k_{mn}^2} \right), \end{cases} \\
F_{ln}^{(1)} = \frac{\alpha_l}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)}, \quad E_{ln}^{(2)} = -\frac{k_{ln}}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)}, \quad M_{ln}^{(3)} = \frac{g_{ln} + \gamma_n b_{ln}}{k_{ln}} - F_{ln}^{(3)}, \\
N_{ln}^{(2)} = b_{ln}, \quad E_{ln}^{(1)} = -\frac{\alpha_l}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{ln}b F_{ln}^{(3)} - \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b}, \\
M_{ln}^{(2)} = \frac{bk_{ln}^2}{\gamma_n} \frac{F_{ln}^{(3)}}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} + \frac{bk_{ln}}{\alpha_l} \frac{\operatorname{ch} k_{ln}b}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} F_{ln}^{(3)} - b_{ln} \operatorname{cth} k_{ln}b, \\
N_{ln}^{(1)} = \frac{\alpha_l}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)} \left(\operatorname{cth} k_{ln}b + \frac{bk_{ln}}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} \right) - \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b} (1 + bk_{ln} \operatorname{cth} k_{ln}b) - \\
\quad - \frac{d_{ln} + \alpha_l b_{ln}}{k_{ln}} \operatorname{cth} k_{ln}b + \frac{d'_{ln} + \alpha_l b'_{ln}}{k_{ln} \operatorname{sh} k_{ln}b}, \quad (3.3) \\
N_{ln}^{(3)} = F_{ln}^{(3)} \left(\frac{bk_{ln}}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} + \operatorname{cth} k_{ln}b \right) - \frac{\gamma_n}{\alpha_l} \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b} (1 + bk_{ln} \operatorname{cth} k_{ln}b) + \\
\quad + \frac{g'_{ln} + \gamma_n b'_{ln}}{k_{ln} \operatorname{sh} k_{ln}b} - \frac{g_{ln} + \gamma_n b_{ln}}{k_{ln}} \operatorname{cth} k_{ln}b, \\
E_{ln}^{(3)} = -F_{ln}^{(3)} \operatorname{cth} k_{ln}b + \frac{\gamma_n}{\alpha_l} \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b}, \\
F_{ln}^{(2)} = \frac{k_{ln}}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{ln}b F_{ln}^{(3)} - \frac{k_{ln}}{\alpha_l} \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b},
\end{aligned}$$

$$M_{ln}^{(1)} = \frac{d_{ln} + \alpha_l b_{ln}}{k_{ln}} - \frac{\alpha_l}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)},$$

где

$$\begin{cases} F_{ln}^{(3)} = \frac{\gamma_n}{2(\gamma+1)k_{ln}^2} \left(2k_{ln}b_{ln} + \frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n g_{ln}}{k_{ln}} \right), \\ F_{ln} = \frac{\alpha_l}{2(\gamma+1)k_{ln}} \left(2b_{ln} + \frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n g_{ln}}{k_{ln}^2} \right), \end{cases}$$

$$H_{lm}^{(2)} = \frac{\beta_m}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)}, \quad G_{lm}^{(3)} = -\frac{k_{lm}}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)}, \quad G_{lm}^{(1)} = \frac{\alpha_l}{\beta_m} G_{lm}^{(2)},$$

$$H_{lm}^{(3)} = -\frac{k_{lm}}{\beta_m} G_{lm}^{(2)}, \quad K_{lm}^{(3)} = \frac{\gamma k_{lm}}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)} + \frac{P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}},$$

$$L_{lm}^{(3)} = \frac{(\gamma+1)k_{lm}}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} - \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^2},$$

$$K_{lm}^{(1)} = \frac{\gamma \alpha_l}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} + \frac{f_{lm}}{k_{lm}} - \frac{\alpha_l (\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm})}{2k_{lm}^3},$$

$$K_{lm}^{(2)} = \gamma G_{lm}^{(2)} + \frac{h_{lm}}{k_{lm}} - \frac{\beta_m (\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm})}{2k_{lm}^3},$$

$$L_{lm}^{(1)} = (\gamma+1) H_{lm}^{(1)} + \frac{\beta_m (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3 \operatorname{sh} k_{lm} c} -$$

$$- \frac{\beta_m (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3} \operatorname{cth} k_{lm} c - \frac{\alpha_l P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}^2}, \quad (3.4)$$

$$L_{lm}^{(2)} = \frac{\beta_m}{\alpha_l} (\gamma+1) H_{lm}^{(1)} + \frac{\alpha_l (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3} \operatorname{cth} k_{lm} c -$$

$$- \frac{\alpha_l (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3 \operatorname{sh} k_{lm} c} - \frac{\beta_m P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}^2},$$

где $H_{lm}^{(1)}$ и $G_{lm}^{(2)}$ определяются из уравнений

$$\frac{1 - k_{lm} c \operatorname{cth} k_{lm} c}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} - \frac{k_{lm} c}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)} = \frac{P_{lm} - P_{lm} c \operatorname{ch} k_{lm} c}{(\gamma'-1)k_{lm}^2 \operatorname{sh} k_{lm} c} + \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^3},$$

$$\frac{1 + k_{lm} c \operatorname{cth} k_{lm} c}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)} + \frac{k_{lm} c}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} = \frac{P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}^2} -$$

$$- \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^3 \operatorname{th} k_{lm} c} + \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^3 \operatorname{sh} k_{lm} c}.$$

Здесь через P_{lm} и P_{lm}' обозначены следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} P_{lm} &= p_{lm} - \frac{2}{ab} \left[b \sum_{n=0}^{\infty} Q_{lmn} + a \sum_{n=0}^{\infty} R_{lmn} \right], \quad (l \neq 0, m \neq 0), \\ P_{lm} &= p_{lm} - \frac{2}{ab} \left[b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q_{lmn} + a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_{lmn} \right], \quad (l \neq 0, m \neq 0) \end{aligned} \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{lmn} &= \frac{k_{mn}}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{2k_{mn}^2 (\beta_m^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \alpha_l^2)}{\gamma_n (k_{mn}^2 + \alpha_l^2)} D_{mn}^{(3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{mn}^2 + \beta_m^2}{k_{mn}} a_{mn} - \frac{\gamma_l' \gamma_n e_{mn} + \beta_m c_{mn}}{k_{mn}} \right\} - \\ &\quad - \frac{k_{mn} (-1)^l}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{2k_{mn}^2 (\beta_m^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \alpha_l^2)}{\beta_m (k_{mn}^2 + \alpha_l^2)} \bar{D}_{mn} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{mn}^2 + \beta_m^2}{k_{mn}} a'_{mn} - \frac{\gamma_l' \gamma_n e'_{mn} + \beta_m c'_{mn}}{k_{mn}} \right\}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{lmn} &= \frac{k_{ln}}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \left\{ \frac{2k_{ln}^2}{\gamma_n} \frac{\alpha_l^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \beta_m^2}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} F_{ln}^{(3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{ln}^2 + \alpha_l^2}{k_{ln}} b_{ln} - \frac{\gamma_l' \gamma_n g_{ln} + \alpha_l d_{ln}}{k_{ln}} \right\} - \\ &\quad - \frac{(-1)^m k_{ln}}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \left\{ \frac{2k_{ln}^2}{\alpha_l} \frac{\alpha_l^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \beta_m^2}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} F_{ln} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{ln}^2 + \alpha_l^2}{k_{ln}} b_{ln} - \frac{\gamma_l' \gamma_n g'_{ln} + \alpha_l d'_{ln}}{k_{ln}} \right\}. \end{aligned}$$

Для определения свободных членов получаются уравнения

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 \gamma_l' &= \frac{p_{00} + p'_{00}}{2} + \frac{1 + 2\nu}{2\nu} \left[\sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{e_{0n} - e'_{0n}}{a \gamma_n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{g_{0n} - g'_{0n}}{b \gamma_n} \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$a_0 = a_{00}, \quad a_1 = \frac{a'_{00} - a_{00}}{a}, \quad b_0 = b_{00}, \quad b_2 = \frac{b'_{00} - b_{00}}{b}.$$

При удовлетворении граничных условий получаем также следующее равенство:

$$\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e_{0n} - e'_{0n}}{a \gamma_n} + \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{g_{0n} - g'_{0n}}{b \gamma_n} = \frac{\nu (p_{00} - p'_{00})}{1 - 2\nu}, \quad (3.8)$$

которое является уравнением равновесия внешних сил, действующих на поверхности параллелепипеда по направлению оси Z ($\Sigma Z = 0$).

Пример. В качестве примера рассмотрен изгиб толстой плиты ($a = b = 3c = \pi$), находящейся под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки $\sigma_z(x, y, z) = -P$, когда на боковых поверхностях отсутствуют нормальные перемещения и касательное напряжение τ_{xz} . На этих же поверхностях касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в направлениях x и y изменяются по закону синуса, а в направлении z либо по закону симметричной параболы, либо же остаются постоянными. Для этой задачи граничные условия (3.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} f_i = f_i^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 6, 8), \quad f_9 = 0, \quad f_9(x, y, z) = -P, \\ -f_5 = f_5^{(1)} = A_0 z \left(\frac{\pi}{3} - z \right) \sin y, \quad -f_7 = f_7^{(1)} = A_0 z \left(\frac{\pi}{3} - z \right) \sin x, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} f_i = f_i^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 6, 8), \quad f_9 = 0, \quad f_9(x, y, z) = -P, \\ -f_5 = f_5^{(1)} = A_0' \sin y, \quad -f_7 = f_7^{(1)} = A_0' \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Здесь постоянные A_0 и A_0' определяются из уравнения равновесия сил (3.8), действующих на плиту вдоль оси z , и имеют значения

$$A_0 = \frac{81P}{4\pi}, \quad A_0' = \frac{3\pi P}{8}. \quad (3.11)$$

Некоторые значения напряжений τ_{xz} , σ_x и перемещения w для различных точек плиты, вычисленные по формулам (1.4) при $\nu = 0,3$ для рассматриваемого случая, приведены в таблицах 1, 2, 3, 4, 5. В этих таблицах напряжения σ_x и τ_{xz} приведены в долях (P), а перемещения w в долях $\left(\frac{P}{G}\right)$.

Таблица 1

Значение τ_{xz} для $x = \frac{9\pi}{10}$ при
условии (3.9)

$y \backslash z$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	0,0865	0,3456	0,6040
$\frac{\pi}{6}$	0,1222	0,5009	0,8595
$\frac{\pi}{4}$	0,0474	0,3187	0,6037

Таблица 2

Значение τ_{xz} для $x = \frac{9\pi}{10}$
при условии (3.10)

$y \backslash z$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	0,6039
$\frac{\pi}{6}$	0,8576
$\frac{\pi}{4}$	0,6032

Таблица 3

Значение τ_x для $y = \frac{\pi}{2}$
при условии (3.9)

$x \backslash z$	0
0	-1,3990
$\frac{\pi}{6}$	-0,1429
$\frac{\pi}{3}$	+1,1133

Таблица 4

Значение w для $z=0$ при
условии (3.9)

$y \backslash x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-1,1091	-0,9178	-0,2139
$\frac{\pi}{4}$	-0,9178	-0,5991	-0,0341
0	-0,2139	-0,0341	0

Таблица 5

Значение w для $z=\frac{\pi}{3}$ при условии (3.9)

$y \backslash x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-1,2587	-1,0674	-0,3635
$\frac{\pi}{4}$	-1,0674	-0,7487	-0,1837
0	-0,3635	-0,1837	-0,1496

Из табл. 1 и 2 видно, что, когда на плоскости $z=c$ имеем равномерно распределенную нормальную нагрузку, независимо от того, каким образом задан закон распределения касательных напряжений τ_{xz} вдоль z на боковых плоскостях $x=0$ и $x=a$, закон распределения этих напряжений вдоль z на средней линии $\left(y = \frac{\pi}{2}\right)$

плоскости $\left(x = \frac{9\pi}{10}\right)$ является параболическим. На линиях $\left(y=0, \right.$

$y = \frac{\pi}{4}\left.)\right)$ этой плоскости закон распределения касательных напряжений τ_{xz} существенно не отличается от параболического закона. По-

этому можно сказать, что теория, предложенная Амбарцумяном С. А. [18] для расчета тонких плит, дает хороший результат и при расчете достаточно толстых плит, даже вблизи торцов плиты, если закон распределения нагрузки на поверхности плиты близок к равномерному. Из табл. 3 видно, что для рассматриваемого случая закон рас-

пределения нормальных напряжений σ_x на средней линии $\left(y = \frac{\pi}{2}\right)$

плоскости „защемления“ ($x=0$) вдоль оси z является линейным, при- том „нулевая“ точка не совпадает со средней точкой $\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ и

перемещена вверх относительно этой точки. Выше „нулевой“ точки существуют растягивающие нормальные напряжения σ_x , ниже — сжимающие. Нужно отметить, что сделанные выводы имеют приближенный характер, так как основаны на значениях напряжений τ_{xz} , τ_{xy} для трех и пяти точек соответствующих сечений.

Вычисления показывают, что для рассматриваемого случая на средней плоскости плиты $\left(z = \frac{\pi}{6}\right)$ существуют постоянные сжимающие нормальные напряжения σ_x и σ_y величиной

$$\sigma_x\left(x, y, \frac{\pi}{6}\right) = \sigma_y\left(x, y, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} P.$$

Из табл. 4 и 5 видно, что перемещения w соответствующих точек

плоскости ($z = \frac{\pi}{3}$) больше, чем перемещения w точек плоскости ($z=0$): разница между соответствующими значениями постоянна и равна $w_0 = -0,1496$. Это значит, что плоскости $z=0$ и $z = \frac{\pi}{3}$ после деформации опять останутся параллельными.

Считаем приятным долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук Б. Л. Абрамяну за руководство.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт

Поступила 10 V 1964

Ա. Լ. ԲԱՐՈՅԱՆ, Ս. Ի. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆ ԶՈՒԿԱԶՆԵՐՆԵՍԻ
ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍՏՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Հոդվածում արվում է ուղղանկյուն դուգանաանիստի առաձգական հավասարակշռության երկու խնդիրների ճշգրիտ լուծումը հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում.

ա) Զուգահեռանիստի $z=0$, $z=c$ նիստերում արված են τ_{xz} և τ_{yz} շոշափող լարումները և w տեղափոխումը, իսկ դուգանաանիստի մակերևույթի միացած մասերում՝ լարումները: Այդ խնդիրը կարելի է դիտել որպես Ալմանդիի խնդիր ուղղանկյուն կտրվածքով ձողերի համար:

բ) Զուգահեռանիստի $x=0$, $x=a$ և $y=0$, $y=b$ նիստերի վրա արված են համապատասխան շոշափող լարումները և նորմալ տեղափոխումները, իսկ $z=0$, $z=c$ հարթությունների վրա արված են լարումները, այսինքն դիտարկվում է ուղղանկյուն կտրվածքով սալերի ծաման խնդիրը:

Օգտվելով Ֆուրիեի մեթոդից, Լամեի հավասարակշռության հավասարումների լուծումը ներկայացված է Ֆուրիեի կրկնակի շարքերի գումարի տեսքով:

Առաջին խնդրում անհայտ գործակիցների որոշումը բերվում է գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների լուծմանը, ցույց է արվում, որ այդ սիստեմները սեղուկար են, իսկ ազատ անդամները սահմանափակ են վերին և ձգտում են դերոյի $O\left(\frac{1}{l^2 n}\right)$ կարգով:

Երկրորդ խնդիրը լուծվում է առանց գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների օգտագործման: Այդ խնդրի համար դիտարկված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, 15, вып. 2, 1951.

2. Филоменко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, 15, вып. 5, 1951.
3. Филоменко-Бородич М. М. О задаче Ламе для параллелепипеда в общем случае поверхностных нагрузок. ПММ, 21, вып. 4, 1957.
4. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. § 66, Paris, 1852.
5. Тимошенко С. П. Курс теории упругости, ч. 1, § 44. ОНТИ, М., 1937.
6. Hager K. Spannungen in gleichmäßig gedrückten Prismen. Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstag gewidmet. Berlin, 1916.
7. Фепфль А. и Л. Сила и деформация, ч. 1, § 16. ОНТИ. НКТП СССР, М.—Л., 1936.
8. Валов Г. М. Об одной задаче о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями. Вестник МГУ, № 3, 1959.
9. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. Вестник МГУ, № 2, 1957.
10. Мешков А. И. Общее решение задачи о кручении косоугольного параллелепипеда. Вестник МГУ, № 3, 1959.
11. Нетребко В. Н. Стержневое кручение упругого параллелепипеда. Вестник МГУ, № 6, 1956.
12. Байда Э. Н. Задача об упруго-деформированном состоянии ортотропного и изотропного параллелепипеда. Известия высших учебных заведений, Стр. и архит., № 6, 1959.
13. Мелконян А. П. О сжатии прямоугольного параллелепипеда. Юбилейный сборник трудов Ереванского политех. ин-та, 1961.
14. Мишоноу М. Общий метод решения пространственной задачи теории упругости для параллелепипеда. Известия техн. ин-та Болгар. АН, КН 9—10, 1960.
15. Теодореску П. П. Sur le problème du parallélépipède élastique. Archiwimechaniki stosowanej, 5/6, 12, 1960.
16. Вишняков В. В. Решение трех краевых задач пространственной теории упругости для прямоугольной призмы. Доклады VI научной конференции Новокузнецкого педагогического института по физ.-мат. наукам. Новокузнецк, 1963, 10—12.
17. Мешков А. И. Равновесие упругого параллелепипеда. Вестник МГУ, № 2, 1957.
18. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.