С. Я. ГУСМАН

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ
 КОШИ-РИМАНА С НЕЛИНЕЙНЫМИ
 ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = f_1(x, y, u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f_2(x, y, u, v) \end{cases} \quad (1)$$

записывается в виде одного уравнения

$$\bar{w}_z = a(z, w), \quad (2)$$

где

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad a(z, w) = \frac{1}{2} (f_1(x, y, u, v) + if_2(x, y, u, v)).$$

Уравнение (2) и его решения подробно исследованы в монографии [1] для случая $a(z, w) = a(z)w + b(z)\bar{w} + c(z)$, где $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ принадлежат $L_p(\bar{D})$ или $L_{p,2}$, $p > 2$. Ниже приводятся некоторые результаты для более общего случая, когда $a(z, w)$ непрерывна по w при любом $z \in \bar{D}$, где $\bar{D}$ — замыкание области D , измерима при любом непрерывном $w(z)$ и удовлетворяет неравенству

$$|a(z, w)| \leq a(z) (|w| + 1)^2 (\ln(|w| + 2))^k, \quad (3)$$

где $a(z)$ принадлежит $L_p^1(\bar{D})$ или $L_{p,2}$, если область D неограничена, $p > 2$. Если D — область римановой поверхности R , то $a(z, w)$ должна быть ковариантой вида

$$a(z^*, w) = a(z, w) \frac{dz}{dz^*}.$$

$a(z)$ изменяется в этом случае по закону $a(z^*) = a(z) \left| \frac{dz}{dz^*} \right|$. О пространстве L_p на R см. [2].

Регулярным решением уравнения (2) назовем непрерывную в D однозначную функцию $w(z)$, которая почти всюду имеет обобщенную производную и удовлетворяет уравнению (2).

1. D — комплексная плоскость.

Теорема 1. При $\alpha < 1$, а также при $\alpha = 1$ и $\beta < 0$ существует регулярное решение уравнения (2), принимающее в данной точке z_0 данное значение w_0 .

Доказательство. Введем вспомогательное переменное $\zeta(z) = w(z) - w_0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$\zeta(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{(z_0 - z) a(t, \zeta(t) + w_0)}{(t - z)(t - z_0)} d\tau_t = N\zeta(z). \quad (4)$$

Из неравенства (3) следует, что оператор N переводит при достаточно большом натуральном n множество функций, удовлетворяющих условиям

$$C_{\frac{\rho-2}{\rho}}(f(z)) < n, \quad f(z_0) = 0, \quad (5)$$

в себя. По принципу Шаудера уравнение (4) имеет в этом множестве решение $\zeta_0(z)$. Функция $\zeta_0(z) + w_0$ является искомой.

Замечание 1. Условие $\alpha < 1$, так же как и непрерывность $a(z, w)$ по w , являются существенными для справедливости теоремы 1.

Например, если $a(z, w) = \begin{cases} 1, & |z| \leq 1, \quad w = 0 \\ 0, & |z| > 0 \text{ или } w \neq 0 \end{cases}$, то не существует регулярного решения уравнения (2), равного нулю в начале координат. Примеры уравнений вида (2), не имеющих целых решений, для любого $\alpha > 1$ имеются в работе [3].

Замечание 2. Из условий теоремы 1 не следует единственности регулярного решения, равного w_0 в точке z_0 . Например, уравнение (2) при $a(z, w) = \begin{cases} 0, & |z| \leq 1 \\ -\frac{4w^2}{(|zw| + 1)^2}, & |z| > 1 \end{cases}$ имеет наряду с

решением $w = 0$ также решение $w_1 = \begin{cases} z, & |z| \leq 1, \\ \frac{1}{z}, & |z| \geq 1, \end{cases}$ которое тоже равно

но нулю в начале координат. Уравнение $w_z = a(z) w^{1-\frac{1}{n}}$, где $a(z) \in L_p, C_\alpha$, имеет ровно n регулярных решений, принимающих значение $w_0 \neq 0$ в точке z_0 .

2. D — ограниченная плоская область или область на замкнутой римановой поверхности.

Теорема 2. Пусть $P_1, \dots, P_n$ — точки D , а $w_1, \dots, w_n$ — произвольные комплексные числа. При $\alpha < 1$, а также при $\alpha = 1$ и $\beta < 0$ существуют однозначные решения уравнения (2), принимающие в каждой точке P_k значение w_k , $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Введем вспомогательное переменное $\zeta(z) = w(z) - \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — ограниченная на $\bar{D}$ аналитическая функция, принимающая в точке P_k значение w_k , $k=1, \dots, n$. Полагая

$$\hat{A}(t, z) = A(t, z) - \sum_{k=1}^n A(t, z(P_k)); \quad \text{где } A(t, z) \text{ — ядро Коши на } \bar{D}$$

(см. [4]), рассмотрим интегральное уравнение

$$\zeta(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D a(t, \zeta(t) + \varphi(t)) \hat{A}(t, z) dz_t. \quad (4)$$

По принципу Шаудера оно имеет решение $\zeta_0(z)$; функция $\zeta_0(z) + \varphi(z)$ является искомой.

Следствие. Уравнение

$$w_z = \frac{a(z, w)}{[(z - z_1) \cdots (z - z_n)]^{\frac{p-1}{p}}}, \quad (6)$$

где $z_1, \dots, z_n$ — различные точки плоской области D , имеет при $\alpha < 1$ и при $\alpha = 1, \beta < 0$ регулярные решения.

Теорема 3. Если последовательность $\{w_n(z)\}$ регулярных решений уравнения (2) сходится равномерно в D к $w(z)$, то $w(z)$ является регулярным решением этого уравнения.

Доказательство. Сходящейся последовательности $\{w_n(z)\}$ соответствует по формуле

$$\varphi(z) = w(z) + \frac{1}{\pi} \iint_D a(t, w(t)) A(t, z) dz_t \quad (7)$$

равномерно сходящаяся последовательность аналитических в D функций, предел которой аналитичен в D , откуда и следует справедливость теоремы 3. При доказательстве этой теоремы неравенство (3) не используется.

Теоремы 2 и 3 остаются справедливыми на произвольной открытой римановой поверхности D , если $a(z)$ имеет компактный носитель. Если D — замкнутая риманова поверхность, то, как показал Ю. Л. Родин, даже уравнение

$$w_z = a(z) \quad (8)$$

не имеет в общем случае регулярных решений, так как его решения выражаются формулой

$$w(z) = \Phi(z) - \frac{1}{\pi} \iint_D A(t, z) a(t) dz_t,$$

а $A(t, z)$ на D имеет особенности по z .

3. Частным случаем уравнения (2) является уравнение

$$w_z = a(z, w) w, \quad (9)$$

однако, оно не удовлетворяет при $\alpha > 0$ и при $\alpha = 0, \beta \geq 0$ условиям теорем 1 и 2. При $\alpha > 0$ это уравнение может не иметь регулярных решений [3], но при $\alpha = 0$ и $\beta < 1$ на уравнение (9) распространяются результаты теоремы 1. Для доказательства достаточно сделать подстановку $\xi = \ln w$. Возможность этой подстановки обеспечивается тем, что в силу неравенства (3) ограниченное на всей плоскости и не равное тождественному нулю решение уравнения (9) является обобщенной аналитической функцией и не имеет нулей.

Пермский государственный
университет

Поступила 20 I 1964

Ս. ՅԱ. ԳՍՄԱՆ

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՋ ՄԱՍԵՐՈՎ ԿՈՇԻ-ՌԻՄԱՆԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ՌԵԳՈՎԵՅԱԼ
ԼՈՒՑՈՒՄԵՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է Կոշի-Ռիմանի $W_z = a(z, \omega)$ սխեմներ, բաժանանաչափ բնոճանուր տեսքի աջ մասով, որ բաժարարում է որոշակի դեաճատականի, և ասումնասիրվում են նրա սեղուլյար լուծումները: Այն դեպքում, երբ սխեմներ որոշված է ամբողջ հարթության վրա, ապացուցված է Կոշու խնդրի սեղուլյար լուծման գոյությունը բնոճանբազեա ոչ միակ ած-պիսի $a(z, \omega)$ -երի, որոնց աճը ըստ ω -ի ենթարկված է մի բանի անհավա-սարությունների: Համանման պնդումները երևան են բերված սահմանափակ հարթ կամ փակ սիմանյան մակերևույթների վրա գտնվող ախրույթների դեպ-քում, ինչպես նաև հետազոտված է սեղուլյար լուծումների հավասարաչափ սահմանների վարքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
2. Филимонова И. И. Некоторые свойства операторов T и P на конечных римановых поверхностях. Ученые записки Пермского госуниверситета, 22, вып. 2, 1962, 65—72.
3. Саркисян С. Ц. О разрушении решений систем уравнений с частными производными. ДАН АрмССР, 36, № 5, 1963.
4. Гусман С. Я. и Родин Ю. Л. Ядро интеграла типа Коши на замкнутых римановых поверхностях. Сиб. мат. журнал, 3, № 4, 1962, 527—531.