ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. ХАЧАТРЯН

СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При равномерном движении осциллятора с частотой Ω вдоль оси z в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \Delta \cos \frac{2\pi}{l} z \tag{1}$$

наблюдается спектр излученных частот [1] (в квазиклассическом приближении)

$$\omega = \frac{n\Omega + \dfrac{2\pi v_0}{l} m}{1 - \dfrac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0} \cos \vartheta} \tag{2}$$

(v_0 — скорость поступательного движения осциллятора, ϑ — угол излучения, отсчитываемый от направления скорости, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

Однако, спектр вида (2) в квазиклассическом приближении характерен не только для излучения осциллятора в среде с диэлектрической проницаемостью (1). Такой спектр частот излучается и в произвольной периодически-неоднородной среде

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(z), \quad \varepsilon_1(z + nl) = \varepsilon_1(z) \tag{3}$$

зарядом, совершающим движение по закону*

$$\begin{aligned} v(t + nT) &= v(t) = v_z(t), \\ z(t + nT) &= z(t) + nz_0 \end{aligned} \tag{4}$$

$\left(l\right.$ — период среды, $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ — период движения, $z_0 = v_0 T$, v_0 — скорость поступательного движения $\left.\right)$.

Исходим из выражения для векторного потенциала в неоднородной среде [3]

* Как мне любезно сообщил Б. М. Болотовский, им и В. Е. Пафомовым была рассмотрена аналогичная задача для излучения при произвольном периодическом движении заряда в вакууме [2].

$$A(q, z) = \frac{ie}{4\pi^2 c\varkappa(z)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp\left\{i\left(\omega t + \int\limits_{z(t)}^{z} \varkappa(z')\, dz'\right)\right\} dt, \tag{5}$$

где

$$\varkappa(z) = \varkappa_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{c^2\varkappa_0^2}\varepsilon_1(z)}\,, \tag{6}$$

$$\varkappa_0 = k_0 \cos\vartheta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta, \quad q = k_0 \sin\vartheta.$$

Так как $\varepsilon_1(z)$—периодическая функция, то корень в выражении (6) можно разложить в ряд Фурье, причем конечный результат не меняется, если для простоты предполагать, что $\varepsilon_1(z)$ — четная функция от координаты

$$\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{c^2\varkappa_0^2}\varepsilon_1(z)} = a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos\frac{2\pi r}{l}z, \tag{7}$$

где a_0 и a_r — коэффициенты разложения.

Подставим разложение (7) в (5). Поскольку верхний предел интегрирования по z' не зависит от t, то, вынося соответствующие множители из-под знака интеграла по t, мы найдем, что вектор-потенциал пропорционален следующему выражению

$$R = \int v(t)\, e^{i(\omega t - a_0\varkappa_0 z(t))} \prod_{r=1}^{\infty} \exp\left\{-iA_r \sin\frac{2\pi r}{l} z(t)\right\} dt,$$

где $A_r = \dfrac{\varkappa_0 l a_r}{2\pi r}$.

Используя теперь известное равенство

$$e^{-ia\sin x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a)\, e^{-imx},$$

получаем

$$R = \int v(t) e^{i(\omega t - a_0\varkappa_0 z(t))} \prod_{r=1}^{\infty} \left\{\sum_m J_m(A_r) e^{-i\frac{2\pi r}{l}mz(t)}\right\} dt. \tag{8}$$

Выражение $\prod\limits_{r=1}^{\infty}\left\{\sum\limits_m \cdots\right\}$ можно представить в виде суммы членов следующего типа

$$\left(\prod_{r=1}^{\infty} J_{m_r}(A_r)\right) e^{-i\frac{2\pi M}{l}z(t)},$$

где $M = \prod\limits_{r=1}^{\infty} r m_r$, а m_r — некоторые целые числа из набора $0, \pm 1,$

$\pm 2, \cdots$. Тогда R разобьется на сумму членов, пропорциональных интегралам вида

$$B = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{i\left(\omega t - a_0 \varkappa_0 z(t) - \frac{2\pi M}{l} z(t)\right)} dt. \tag{9}$$

Представляя интеграл (9) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{(n-1)T}^{nT} \cdots dt,$$

делая замену

$$t = (n-1)\,T + t'$$

и учитывая (4), получим

$$B = \int\limits_{0}^{T} v(t) \exp\left\{i\left[\omega t - \left(a_0 \varkappa_0 + \frac{2\pi M}{l}\right) z(t)\right]\right\} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(n-1)\left[\omega T - \left(a_0 \varkappa_0 + \frac{2\pi M}{l}\right) z_0\right]\right\} dt.$$

Но

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(n-1)\left[\omega T - \left(a_0 \varkappa_0 + \frac{2\pi M}{l}\right) z_0\right]\right\} =$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\omega T - \left(a_0 \varkappa_0 + \frac{2\pi M}{l}\right) z_0 - 2\pi k\right]. \tag{10}$$

Формулу (10) легче всего проверить, разлагая периодическую функцию $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k)$ в ряд Фурье [4]).

Отсюда следует, что излучение возможно только при выполнении условия

$$\omega T - \left(a_0 \varkappa_0 + \frac{2\pi M}{l}\right) z_0 - 2\pi n = 0.$$

Разделив на T, получаем спектр частот

$$\omega = \frac{n\Omega + \dfrac{2\pi v_0}{l} M}{1 - \dfrac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\, a_0 \cos\vartheta}. \tag{11}$$

При малых неоднородностях, когда $\frac{\omega^2 \varepsilon_1}{c^2 \varkappa_0^2} \ll 1$, формула (11) переходит в формулу (2), которая фактически получена также при малых неоднородностях.

Спектр частот (2) можно получить и исходя из законов сохранения энергии и импульса. Предварительно сделаем следующее замечание. Как указал И. М. Франк, излучение заряженной частицы, движущейся с периодической во времени скоростью в однородной среде, эквивалентно (в смысле спектра излучения) излучению равномерно движущейся частицы в неоднородной среде. Применительно к нашей задаче это замечание сводится к следующему: излучение заряженной частицы, движущейся со скоростью (4) в среде с диэлектрической проницаемостью (3) эквивалентно излучению частицы, движущейся с постоянной скоростью v_0 в среде, диэлектрическая постоянная которой является периодической функцией координаты и времени с периодами l и T соответственно (нестационарная и неоднородная среда).

Запишем теперь законы сохранения энергии и импульса при излучении частицей кванта $\hbar\omega$ в нестационарной и неоднородной среде [5].

Изменение энергии частицы

$$\Delta E = \hbar\omega - n\hbar\Omega. \tag{12}$$

Изменение импульса

$$\Delta\vec{p} = \hbar\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{e} + m\hbar\frac{2\pi}{l}\frac{\vec{l}}{l}, \tag{13}$$

$\vec{e}$ — направление распространения кванта, $\vec{l}$ — направление неоднородности.

Умножая (13) на $\vec{v}_0$ и используя известное соотношение $\vec{v}_0\Delta\vec{p} = \Delta E$ (мы предполагаем, что вследствие излучения скорость частицы изменилась мало), получим из (12) и (13)

$$\omega = \frac{n\Omega + \dfrac{2\pi m}{l^2}(\vec{l}\,\vec{v}_0)}{1 - \dfrac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta}, \tag{14}$$

где ϑ — угол между $\vec{v}_0$ и направлением распространения кванта; при $\vec{l}\parallel\vec{v}_0$ формула (14) переходит в формулу (2).

В заключение выражаю благодарность Б. М. Болотовскому и М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждения.

Ереванский государственный университет

Поступила 30 I 1964

Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՍՊԵԿՏՐԸ ՊԵՐԻՈԴԻԿ-ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՊԵՐԻՈԴԻԿ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է կամայական պերիոդիկ-անհամասեռ միջավայրում կամայական պերիոդիկ արագությամբ շարժվող լիցքավորված մասնիկի կողմից արձակված ճառագայթման սպեկտրը: Ստացված է, որ սպեկտրն ունի հետևյալ ընդհանուր տեսքը՝

$$\omega = \frac{n\Omega + \frac{2\pi v_0 m}{l^2} (\vec{l}\, \vec{v}_0)}{1 - \frac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0} \cos\vartheta}$$

որտեղ Ω — *մասնիկի տատանման հաճախականությունն է,* v_0*-ն՝ մասնիկի համընթաց շարժման արագությունը,* l*-ը՝ անհամասեռության պերիոդը և* ϑ*-ն՝* $\vec{v}_0$*-ի և քվանտի տարածման ուղղության միջև եղած անկյունը,* $n, m = 0, \pm 1 \pm 2 \cdots$:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачатрян Б. В.* Об излучении осциллятора, движущегося в неоднородной среде. Известия высш. уч. зав., Радиофизика, **6**, 1963, 904.
2. *Болотовский Б. М., Пафомов В. Е.* Частное сообщение.
3. *Тер-Микаелян М. Л.* Излучение фотонов быстрыми частицами в неоднородной среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 2, 1961, 103.
4. *Лифшиц И. М., Каганов М. И.* Некоторые вопросы электронной теории металлов. УФН, **78**(3), 1962, 411.
5. *Барсуков К. А., Болотовский Б. М.* Излучение быстрых частиц в нестационарной неоднородной среде. ЖЭТФ, **45**, 1963, 303.