ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ЖИДКОСТИ

§ 1. Рассмотрим задачу проникания давления в сжимаемую жидкость. Уравнение состояния жидкости политропическое:

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right],$$

где P — давление, ρ — плотность. Рассмотрим плоскую задачу.

Как показано в [5], вблизи фронта звуковой волны $r = a_0 t$ линейное решение имеет вид

$$\frac{P(x, y, t)}{P_A(0)} = \frac{2}{\pi}\frac{V_0 t M^2}{r} y \frac{\sqrt{a_0 t - r}\sqrt{2r}}{V_0^2 t^2 - x^2 M^4}, \tag{1.1}$$

где оси Ox и Oy направлены по границе жидкости и нормально к ней, t — время, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $M = \frac{V_0}{a_0}$, $P_A(t)$ — заданное на границе давление, $V_0 = R'(0)$; $R'(t)$ — скорость движения фронта давления по границе, причем решение (1.1) имеет место как для $R'(t) > a_0$, так и для $R'(t) < a_0$.

Если ввести полярные координаты

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

(1) запишется вблизи звуковой линии $r = a_0 t$ в виде

$$\frac{P}{P_A} = \frac{2}{\pi} M \sin\theta \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{r}{a_0 t}}}{1 - \cos^2\theta M^2}. \tag{1.2}$$

Для потенциала скоростей $\varphi(x, y, t)$ имеем из (1.2):

$$\frac{\varphi}{t} = -\gamma a_0^2 f(\theta)\left(1 - \frac{r}{a_0 t}\right)^{3/2}, \tag{1.3}$$

где

$$\gamma = \frac{P_A(0)}{\rho_0 a_0^2}, \qquad f(\theta) = \frac{2}{3}\frac{2}{\pi}\frac{M\sin\theta}{1 - \cos^2\theta M^2}\sqrt{2}.$$

В работе [6] получено методом Лайтхилла [1] распределение давления на ударной волне, ограничивающей область влияния точки O, во втором приближении

$$P=\gamma^2 \frac{27}{16}(n+1)\rho_0 a_0^2 f^2(\theta). \tag{1.4}$$

Получим (1.4) по методу Витема [2].

В формуле (1.2) для линейного решения заменим линеаризованные характеристические переменные $t-\frac{r}{a_0}$ точными, обозначая их через Y:

$$\frac{P}{P_A(0)}=\frac{3}{2}f(\theta)\frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{\frac{r}{a_0}}}. \tag{1.5}$$

Уравнение характеристики, с учетом того, что ударная волна отличается от звуковой волны $t=\frac{r}{a_0}$ во втором порядке, имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial r}=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_0}\frac{n+1}{2}\frac{P}{Bn}. \tag{1.6}$$

Интегрируя (6), найдем уравнение характеристик

$$t=\alpha(r)-\beta(r)\sqrt{Y}+Y, \tag{1.7}$$

где

$$\alpha(r)=\frac{r}{a_0}, \qquad \beta(r)=\frac{1}{a_0}\frac{n+1}{2}\cdot\frac{P_A}{B_n}\int\limits_0^r\frac{3}{2}f(\theta)\frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{a_0}}}. \tag{1.8}$$

Если продифференцировать условие (1.7) вдоль ударного фронта и подставить в формулу Пфрима, легко найти [2] соотношение:

$$\beta(r)=\frac{2\int\limits_0^Y\sqrt{Y}\,dY}{(\sqrt{Y})^2}=\frac{4}{3}\sqrt{Y}. \tag{1.9}$$

Теперь из (1.5) и (1.9) имеем

$$\frac{P}{P_A(0)}=\frac{27}{8}\frac{n+1}{2}f^2(\theta)\frac{P_A(0)}{\rho_0 a_0^2}, \tag{1.10}$$

что совпадает с формулой (1.4).

Таким образом, метод Витема для случая ударных фронтов, отличающихся от фронтов линейных задач во втором порядке, дает решение во втором приближении.

Поскольку линейное решение (1.2) имеет место для произвольного во времени давления на границе $P_Д(t)$ и поскольку при построении второго приближения используется линейное решение [1], можно утверждать, что решение (1.4) имеет место для произвольного $P_Д(t)$ и скорости фронта по поверхности $R'(t)$. Чтобы подтвердить это положение, проделаем эту же процедуру способом, предложенным В. М. Булахом [4].

Уравнение потенциала скоростей φ в переменных r, θ, t имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{a^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\cdots=0,\tag{1.11}$$

где невыписанные члены содержат производные по θ и, как видно будет из дальнейшего, не влияют на решение.

Введем переменные $\xi=\frac{r}{t}$, θ, t. Тогда (1.11) примет вид

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi^2}\left[\left(\xi-\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)^2-a^2\right]-\frac{a^2}{\xi}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}+t^2\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial t^2}-$$

$$-t\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi\partial t}\left(\xi-\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\xi}\right)+2\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial t}t+\cdots=0,\tag{1.12}$$

где $\overline{\varphi}=\frac{\varphi}{t}$.

В случае, когда $\overline{\varphi}$ не зависит от t так же, как и в [4], легко найти разложение $\overline{\varphi}$ в окрестности звуковой волны $r=a_0t$:

$$\overline{\varphi}=\frac{1}{n+1}(a_0-\xi)^2+\gamma_1(a_0-\xi)^3\ln(a_0-\xi),$$

$$\gamma_1=\frac{2n^3+6n+3n^2+8}{(n+1)^3\,6a_0}.\tag{1.13}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial\xi^2}\neq 0$, имеет место явление пограничного слоя и решение (1.12) можно искать в виде

$$\overline{\varphi}=\lambda^2\varphi_1=\lambda^2\varphi_2^2\,y(\overline{t})\frac{1}{n+1},\tag{1.14}$$

где λ — малый параметр, $\overline{t}=\frac{\xi-a_0}{\lambda\varphi_2}$, причем на ударной волне $\overline{t}=1$.

Если предположить, что φ_2 зависит только от θ, что естественно, поскольку линейное решение (1) вблизи звуковой волны $r=a_0t$ зависит только от $\xi=\frac{r}{t}$ и θ и, следовательно, вдоль ударной волны, определяемой линейным решением, ξ зависит только от θ и собрать в уравнении (1.12) члены с первой степенью λ, легко найти уравнение для y:

$$y''(2\tilde{t}-y')=y'. \tag{1.15}$$

Граничные условия на ударной волне дают

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi}=V=\frac{2D}{n+1}-\frac{a_0^2}{D}\frac{2}{n+1},$$

где D — скорость ударной волны, V — скорость частиц

$$D=\xi\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\xi^2}\xi_0^2\right)$$

или с точностью до малых третьего порядка

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi}=\frac{4}{n+1}(\xi-a_0)=\frac{4}{n+1}\lambda\varphi_2. \tag{1.16}$$

Подставляя сюда выражение (1.14) и учитывая условие $\tilde{\varphi}=0$, имеем при $\tilde{t}=1$

$$y=0,\quad y'=4.$$

Решение (1.15) при этих граничных условиях найдется [4] в виде:

$$y=\frac{8}{3}\left[\tilde{t}-\frac{8}{9}\left(1-\frac{3}{4}\tilde{t}\right)^{3/2}-\frac{8}{9}\right].$$

Теперь из (1.14) находим при больших $(-\tilde{t})$:

$$\tilde{\varphi}=\lambda^2\varphi_2^2 y\frac{1}{n+1}=-\lambda^2\varphi_2^2\frac{1}{n+1}\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{(a_0-\xi)^{3/2}}{(\lambda\varphi_2)^{3/2}}. \tag{1.17}$$

Сравнение с (1.3) дает

$$\lambda\varphi_2=\frac{27}{64}\left(\frac{P_A}{\rho_0a_0^2}\right)^2 f^2(\theta)\,a_0(n+1)^2.$$

Для давления из соотношений на ударной волне находим

$$P=\rho_0DV=\rho_0a_0\frac{4}{n+1}\lambda\varphi_2=\frac{27}{16}\rho_0a_0^2(n+1)\left(\frac{P_A}{\rho_0a_0^2}\right)^2 f^2(\theta),$$

что совпадает с (1.4). Полученные формулы верны для переменного во времени, но постоянного за фронтом давления на поверхности $P_A(t)$, однако, случай переменного давления по координате не внесет дополнительных трудностей.

В случае неоднородной жидкости выберем оси Ox_0 по поверхности жидкости, ось Oz_0 направим вглубь. Уравнение звуковой волны имеет вид [5]:

$$t = \lambda x_0 + \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}\, dz = \tau(x_0, z_0),$$

$$x_0 = \int_0^{z_0} \frac{\lambda dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}},$$

где λ характеризует угол выхода луча из точки O с осью Ox_0, $a(z)$ — начальная скорость звука жидкости.

Для давления вблизи звуковой волны можно получить асимптотическую формулу из общих квадратур [5], получаемых по методу Адамара [5].

Если заменить в этой формуле, пользуясь методом Витема [2], характеристическую переменную $t - \tau(x_0, z_0)$ через точную характеристику y, получим для распределения давления

$$\frac{P(x_0, z_0, t)}{P_\lambda(0)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\frac{\mu(0)}{\mu(z_0)}}{J_1(z_0, 0)\, J_2(z_0, 0)}}\, V_0 \sqrt{\frac{2x_0}{\lambda}}\, \frac{2}{1 - \lambda^2 V_0^2} \sqrt{y}, \tag{1.18}$$

где

$$\mu(z_0) = \sqrt{\frac{1}{a^2(z_0)} - \lambda^2}, \quad J_1(z_0, 0) = \int_{z_0}^{0} \frac{dz}{a^2(z)\, \mu^3(z)},$$

$$J_2(z_0, 0) = \int_{z_0}^{0} \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Обозначим через s длину дуги вдоль характеристического луча. Тогда вдоль характеристики имеет место соотношение [3]:

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{a(z)} - \frac{1}{a(z)} \frac{n+1}{2} \frac{P}{\rho_0 a^2(z)}. \tag{1.19}$$

Интегрируя (1.19) вдоль характеристики, получим:

$$t = \int \frac{ds}{a(z)} - \frac{n+1}{2} \int \frac{ds}{a(z)} \frac{P}{\rho_0 a^2(z)} + y, \tag{1.20}$$

где P находится из (1.18).

Дифференцируя (1.20) вдоль ударного фронта и используя формулу для скорости фронта

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{a(z)} - \frac{n+1}{4} \frac{1}{a(z)} \frac{P}{\rho_0 a^2(z)},$$

получим уравнение для y вдоль фронта

$$y\int_0^s \frac{ds}{a^2(z)}\frac{P}{\sqrt{y}}\frac{1}{\rho_0 a^2(z)} = \frac{4}{n+1}\int_0^y \sqrt{y}\,dy. \tag{1.21}$$

Уравнение (1.21) для неоднородной жидкости легко выводится из соотношения, найденного К. Е. Губкиным [3] при решении задачи о коротких волнах.

Подставляя в (1.21) выражение P из (1.18), найдем, используя уравнение звуковой волны: $ds = \dfrac{dz}{a(z)\mu(z)}$, распределение y вдоль ударной волны

$$\sqrt{y}\,\frac{8}{3}\,\frac{1}{n+1} = \frac{V_0}{\pi}\int_0^{z_0} \frac{\sqrt{\mu(0)}\,\dfrac{P_A(0)}{\rho_0 a^2(z)}\sqrt{\dfrac{2x_0}{\lambda}}\,dz}{a^2(z)\,\mu^3(z)\,(1-V_0^2\lambda^2)\sqrt{J_1(z_0,0)\,J_3(z_0,0)}}. \tag{1.22}$$

Подстановка (1.22) в (1.18) дает давление на ударной волне.

Легко видеть, что давление будет малой порядка $\left(\dfrac{P_A}{\rho_0 a^2}\right)^2$.

§ 2. Рассмотрим осесимметричную задачу распространения давления в сжимаемую жидкость. Уравнение политропы

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right], \tag{2.1}$$

где P — давление, ρ — плотность, B, n — постоянные.

Выберем оси координат Ox в плоскости поверхности, Oy перпендикулярно к ней. Если ввести еще полярные координаты $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, решение задачи [5] вблизи звуковой волны $r = a_0 t$ запишется

$$\frac{P}{P_A(0)} = \frac{\widetilde{M}^5 r\sin\theta\,(at - r)\,2r}{2V_0^3 t^3\,(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}}, \tag{2.2}$$

где $\widetilde{M} = \dfrac{V_0}{a_0}$, a_0 — скорость звука невозмущенной жидкости, t — время, V_0 — скорость фронта давления по границе, $P_A(t)$ — давление на границе.

Ищем решение во втором приближении, пользуясь методом Витема [2]. Заменяя в (2.2) линейные характеристики точными, найдем

$$\frac{P}{P_A(0)} = \frac{\widetilde{M}^3 \sin\theta\, y}{\dfrac{r}{a_0}(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}} = \varphi(\theta)\,\frac{1}{\dfrac{r}{a_0}}\,y, \tag{2.3}$$

где $\varphi = \dfrac{\widetilde{M}^3\sin\theta}{(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}}$, $y = \mathrm{const}$ — характеристическая линия точной задачи. Уравнение характеристик во втором приближении записывается

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0}\frac{P}{Bn} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0}\frac{\varphi(\theta)}{\frac{r}{a_0}}\frac{P_A(0)}{Bn}y. \tag{2.4}$$

Решение (2.4) при начальном условии (2.1) $t = y$ $r = a_0 y$ имеет вид

$$t = \alpha(r) - \beta(r)\,y + y. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\alpha(r) = \frac{r}{a_0}, \qquad \gamma = \frac{P_A(0)}{Bn},$$

$$\beta(r) = \frac{\widetilde{M}^3}{a_0}\frac{\sin\theta}{(1 - \widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}}\gamma a_0 \ln\frac{r}{a_0 y}.$$

Условие на ударном фронте [2] дает связь $\beta(r)$ и y

$$\beta(r) = \frac{2\int\limits_0^y y\,dy}{y^2} = 1$$

или

$$\varphi(\theta)\,\gamma \ln\frac{r}{a_0 y} = 1. \tag{2.6}$$

Отсюда имеем, что

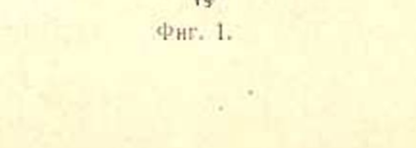
$$y = \frac{r}{a_0} e^{-\frac{1}{\gamma\varphi(\theta)}}. \tag{2.7}$$

Из (2.3) и (2.7) имеем

$$\frac{P}{P_A(0)} = \varphi(\theta)\, e^{-\frac{1}{\gamma\varphi(\theta)}}. \tag{2.8}$$

Решение (2.8) может быть использовано для сферической задачи расширения поршня.

Таким образом, найдено решение в осесимметричной задаче на фронте ударной волны, ограничивающей область начальных возмущений. Для случая $V_0 > a_0$, однако, это решение не будет верно вблизи точки $\cos\theta = \frac{1}{\widetilde{M}}$ касания сферы $r = a_0 t$ и волны AB, то есть точки ε, фиг. 1.



Фиг. 1.

§ 3. Пусть граничные условия задачи таковы, что в предположении малости возмущений движение за ударной волной можно считать простой волной. Рассмотрим политропическое уравнение состояния жидкости. $P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$, где P — давление, ρ — плотность. Уравнения простой волны запишутся в виде [7]:

$$\left(\frac{x}{t} - V_x\right)\cos\varphi + \left(\frac{y}{t} - V_y\right)\sin\varphi = a,$$
$$dV_x = \frac{2}{n-1}da\cos\varphi, \qquad dV_y = \frac{2}{n-1}da\sin\varphi, \tag{3.1}$$

где Ox, Oy — оси декартовых координат, t — время, V_x, V_y — скорости по осям, a — скорость звука жидкости. Покажем, что если движение малое, то из системы (3.1) можно получить с точностью до малых третьего порядка соотношения на ударной волне.

Введем модуль и угол скорости:

$$V_x = V\cos\beta, \quad V_y = V\sin\beta.$$

Тогда имеем

$$dV = \frac{dP}{\rho a}\cos(\varphi - \beta),$$
$$Vd\beta = \frac{dP}{\rho a}\sin(\varphi - \beta). \tag{3.2}$$

В линейной задаче скорость направлена по нормали к характеристике, совпадающей с ударным фронтом, и $\varphi_0 - \beta_0 = 0$. Поэтому $\varphi - \beta$ мало и с точностью до малых третьего порядка имеем

$$dV = \frac{dP}{\rho a},$$
$$Vd\beta = \frac{dP}{\rho a}(\varphi - \beta). \tag{3.3}$$

Невозмущенное состояние перед фронтом ударной волны имеет параметры $V = 0$, $P = 0$, $\rho = \rho_0$.

Пусть параметром, характеризующим малость движения, будет $\frac{P}{\rho_0 a_0^2}$.

Из (3.3) имеем

$$\left(\frac{dV}{dP}\right)_{P=0} = \frac{1}{\rho_0 a_0}, \quad \left(\frac{d^2V}{dP^2}\right)_{P=0} = -\frac{n+1}{2}\frac{1}{\rho_0 a_0}\frac{1}{Bn}, \qquad Bn = \rho_0 a_0^2.$$

Тогда для V найдем разложение

$$V = \frac{P}{\rho_0 a_0} - \frac{n+1}{4}\frac{P}{\rho_0 a_0}\frac{P}{\rho_0 a_0^2}. \tag{3.4}$$

Если записать уравнение $P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$ до третьего порядка, имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{P}{Bn} - \frac{1}{n}\frac{n-1}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{P}{B}\right)^2. \tag{3.5}$$

Тот же результат получится из уравнения ударной адиабаты для жидкости, если ограничиться вторым порядком.

Уравнения неразрывности и импульсов записываются

$$\begin{gathered}\rho_0 D = \rho(D - V),\\ P = \rho_0 DV,\end{gathered} \tag{3.6}$$

где D — скорость ударной волны.

Из (3.5) и (3.6) получим приближенно

$$\frac{P^2}{Bn}\left(1 - \frac{n+1}{2}\frac{P}{Bn}\right) = \rho_0 V^2$$

или

$$V = a_0 \frac{P}{Bn}\left(1 - \frac{n+1}{4}\frac{P}{Bn}\right),$$

что совпадает с (3.4),

Выражение для касательной составляющей скорости к ударной волне имеет вид

$$V_s = V\sin(\lambda - \beta),$$

где λ — угол нормали к ударной волне с осью Ox, причем из условий на ударном фронте приближенно угол λ есть среднее арифметическое углов нормалей к характеристикам до ударной волны и за ней $\lambda = \frac{\varphi_0 + \varphi}{2}$.

Из (3.2) имеем

$$\left(\frac{d\beta}{dP}\right)_{P=0} = \left(\frac{\varphi - \beta}{V}\right)_{P=0}\frac{1}{\rho_0 a_0} = \frac{d(\varphi - \beta)}{dP}\frac{1}{\rho_0 a_0}\frac{dP}{dV}$$

или

$$2\left(\frac{d\beta}{dP}\right)_{P=0} = \left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0}, \quad \text{откуда} \quad \beta = \beta_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0} P,$$

$$\beta = \varphi_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0} P + O(P^2). \tag{3.7}$$

Но из условий на ударной волне

$$\lambda = \varphi_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0} + O(P^2). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) имеем

$$V_s = V\cdot O(P^2) = O(P^3).$$

Итак, нами выведены условия сохранения массы, импульса и энергии и условие для касательной составляющей скорости из уравнений простой волны.

Заметим, что при решении задачи во втором приближении величины β, D, φ, λ достаточно найти в первом приближении. Покажем это. Из уравнений (3.5) найдем для скорости ударной волны

$$D^2 = \frac{P}{\rho_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}.$$

Если для $\frac{\rho}{\rho_0}$ взять разложение до второго порядка включительно, для D получим

$$D = a_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\frac{P}{Bn}\right),$$

то есть первое приближение. Чтобы найти малые второго порядка в выражении D, мы должны задать в разложении $\frac{\rho}{\rho_0}$ члены порядка $\left(\frac{P}{Bn}\right)^3$, то есть выйти за пределы изэнтропического приближения.

Таким образом, мы определяем во втором приближении физические параметры V_x, V_y, P, ρ, V, причем для угла β, например, достаточно брать первое приближение; в самом деле, $V_x = V\cos\beta$, $V_y = V\sin\beta$ и точность в первом порядке β обеспечит точность во втором порядке для компонент скорости.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Поступила 29 XI 1963

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԻ ԱԼԻՔԻ ՎՐԱ ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է հեղուկում հարվածի ալիքի ճնշման որոշման խնդիրը ինչպես համասեռ, այնպես էլ ոչ համասեռ հեղուկների համար: Ցույց է տրվում, որ ճնշումը երկրորդ կարգի փոքր է: Կատարված է այս խնդրի լուծման տարբեր մեթոդների համեմատություն:

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы механики. Сборник статей под редакцией Драйдена и Кармана. Цзян Сюэ-сянь. Метод Пуанкаре-Лайтхилла-Го.
2. *Witham G. B.* The propagation of Weak Spherical Shoks in Stars. Communications of Pure and Applied Mathematics, Vol. VI, 1953.

Губкин К. Е. Образование разрывов в звуковой волне. ПММ, № 4, 1959.

Булах Б. М. О некоторых свойствах сверхзвуковых конических течений газа. ПММ, № 3, 1961.

Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.

Багдоев А. Г. Определение закона распределения давления, распространяющегося с дозвуковой скоростью. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, **15**, № 4, 1962.

Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, 109, 1956.