

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

БАБЛОЯН А. А., ТОНОЯН В. С.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ
В ВИДЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Исследованию плоской задачи теории упругости анизотропного тела посвящено много работ, среди которых особое место занимают работы Д. И. Шермана [1—3], С. Г. Лехницкого [4, 5], Г. Н. Савина [6], С. Г. Михлина [7] и других.

В настоящей работе рассматриваются некоторые конкретные задачи плоской теории упругости для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора, ограниченного двумя концентрическими окружностями и двумя радиусами, когда на кромках сектора граничные условия заданы: а) в напряжениях и б) в некотором смешанном виде. Решения этих задач сводятся к определению одной „бигармонической“ функции. Задачи решаются методом Фурье. Определение постоянных интегрирования в первой задаче сведено к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти системы регулярны и имеют ограниченные сверху свободные члены. Вторая задача решается без применения бесконечных систем линейных уравнений.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим ортотропное однородное упругое тело (предполагается, что физические и геометрические оси тела совпадают), имеющее в плане форму кольцевого сектора.

Как известно [4], в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены через функцию Эри $\Phi(r, \varphi)$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \\ \tau_{\varphi} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Переходим к новым координатам (t, φ) [9, 10]

$$r = ae^t, \quad \varphi = \varphi \quad (1.2)$$

и вместо функции $\Phi(t, \varphi)$ вводим новую функцию

$$F(t, \varphi) = e^t \Phi(t, \varphi). \quad (1.3)$$

Тогда напряжения будут выражаться через новую функцию $F(t, \varphi)$ соотношениями [10]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{e^{-t}}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \right), \\ \tau_{r\varphi} &= - \frac{e^{-t}}{a^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Подставляя эти значения в соотношения обобщенного закона Гука для ортотропного материала и проинтегрировав их, для радиальных и тангенциальных перемещений получим выражения

$$\begin{aligned} au(t, \varphi) &= a_1 \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F \right) dt + a_2 \frac{\partial F}{\partial t} + (a_1 + a_2) F + f'(\varphi), \\ a\vartheta(t, \varphi) &= -a_1 \iint F dt d\varphi + \int \left(a_3 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial F}{\partial t} - a_1 F \right) d\varphi - \\ &\quad - a_1 \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt + a_2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + f_0(t) - f(\varphi), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$a_1 = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad a_2 = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}}, \quad a_3 = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \quad (1.6)$$

а функции $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = 0, \quad f'_0(t) - f_0(t) = 0. \quad (1.7)$$

Проинтегрировав эти уравнения, для функций $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ получим

$$f(\varphi) = E_0 \sin \varphi + F_0 \cos \varphi, \quad f_0(t) = D_0 e^t. \quad (1.8)$$

Функция $F(t, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$a_2 \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + a_5 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + a_1 \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - (a_1 + a_3) \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + a_1 F = 0, \quad (1.9)$$

где

$$a_4 = a_{66}, \quad a_5 = a_4 + 2a_2. \quad (1.10)$$

Частными решениями этого уравнения являются следующие функции:

$$\begin{aligned} &(A \operatorname{sh} \lambda t + B \operatorname{ch} \lambda t + C \operatorname{sh} \beta t + D \operatorname{ch} \beta t) (M \sin \lambda \varphi + N \cos \lambda \varphi), \\ &(A \operatorname{sh} \gamma \varphi + B \operatorname{ch} \gamma \varphi + C \operatorname{sh} \mu t + D \operatorname{ch} \mu t) (M \sin \mu t + N \cos \mu t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{a_3 + a_1 + a_3 \lambda^2 + V(a_3^2 - 4a_1 a_3) \lambda^4 + 2(a_3 a_5 + a_1 a_5 + 4a_1 a_3) \lambda^2 + (a_3 - a_1)^2}{2a_3}}, \\ \beta &= \pm \sqrt{\frac{a_3 + a_1 + a_3 \lambda^2 - V(a_3^2 - 4a_1 a_3) \lambda^4 + 2(a_3 a_5 + a_1 a_5 + 4a_1 a_3) \lambda^2 + (a_3 - a_1)^2}{2a_3}}, \\ \gamma &= \pm \sqrt{\frac{a_5 \mu^2 - 2a_1 + V(a_5^2 - 4a_1 a_5) \mu^4 - 4(a_1 a_3 + a_1^2 + a_1 a_5) \mu^2}{2a_1}}, \\ \delta &= \pm \sqrt{\frac{a_5 \mu^2 - 2a_1 - V(a_5^2 - 4a_1 a_5) \mu^4 - 4(a_1 a_3 + a_1^2 + a_1 a_5) \mu^2}{2a_1}}. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Параметры α , β , γ и δ — комплексные числа, где α и β , γ и δ — сопряженные, и могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + i\alpha_2, & \beta &= \alpha_1 - i\alpha_2, \\ \gamma &= \gamma_1 + i\gamma_2, & \delta &= \gamma_1 - i\gamma_2. \end{aligned}$$

при этом в общем случае

$$\alpha \neq \beta, \quad \gamma \neq \delta.$$

Случай, когда эти параметры равны, получается из общего решения путем предельного перехода.

Легко проверить, что функции

$$\begin{aligned} (A \operatorname{sh} t + B \operatorname{ch} t + C \operatorname{sh} \alpha_0 t + D \operatorname{ch} \alpha_0 t) (M\varphi + N), \\ (A \sin \varphi + B \cos \varphi + C\varphi \sin \varphi + D\varphi \cos \varphi) (Mt + N), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}},$$

также являются решениями уравнения (1.9).

Функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде

$$F(t, \varphi) = a(\varphi) + b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t) \cos \lambda_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi) \cos \mu_k t \quad (1.14)$$

в области $(0 \leq \varphi \leq \varphi_1, 0 \leq t \leq t_1)$,

где

$$\Psi_k(t) = A_k \operatorname{sh} \alpha_k t + B_k \operatorname{sh} \alpha_k (t_1 - t) + C_k \operatorname{sh} \beta_k t + D_k \operatorname{sh} \beta_k (t_1 - t), \quad (1.15)$$

$$\Phi_k(\varphi) = E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi + G_k \operatorname{sh} \gamma_k (\varphi_1 - \varphi) + F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi + H_k \operatorname{sh} \delta_k (\varphi_1 - \varphi),$$

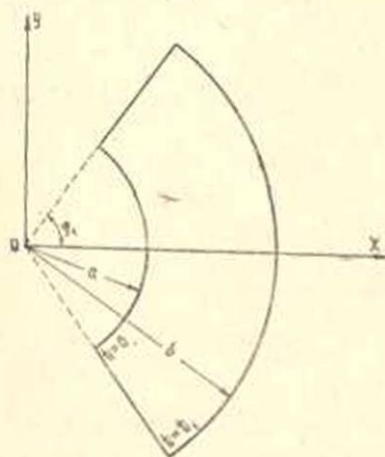
$$\lambda_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \quad \mu_k = \frac{k\pi}{t_1}, \quad (1.16)$$

з величини α_k , β_k , γ_k и δ_k определяются формулами (1.12) с учетом значений (1.16).

Подставив (1.14) в (1.4) и (1.5), для напряжений и перемещений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 a^2 e^i \sigma_r(t, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi'_k(t) - (\lambda_k^2 - 1) \Psi_k(t)] \cos \lambda_k \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \Phi_k(\varphi) \sin \mu_k t + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi'_k(\varphi) + \Phi_k(\varphi)] \cos \mu_k t + a''(\varphi) + a(\varphi) + b'(t) + b(t), \\
 a^2 e^i \sigma_{\varphi}(t, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi'_k(t) + \Psi_k(t)] \cos \lambda_k \varphi - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \Phi_k(\varphi) (\sin \mu_k t + \mu_k \cos \mu_k t) + b''(t) + b'(t), \\
 a^2 e^i \tau_{r\varphi}(t, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Psi'_k(t) \sin \lambda_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \Phi'_k(\varphi) \sin \mu_k t, \\
 a v(t, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_2 (\Psi'_k(t) + \Psi_k(t)) - (a_2 \lambda_k^2 + a_1) \Psi_k(t) + \right. \\
 &+ a_1 (\lambda_k^2 - 1) \int \Psi_k(t) dt \left. \right] \frac{\sin \lambda_k \varphi}{\lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_1 \Phi'_k(\varphi) + \right. \\
 &+ (a_2 \mu_k^2 + a_1) \int \Phi_k(\varphi) d\varphi \left. \right] \frac{\sin \mu_k t + \mu_k \cos \mu_k t}{\mu_k} + (a_1 + a_2) \times \\
 &\times \sum_{k=1}^{\infty} \Phi'_k(\varphi) \cos \mu_k t + \varphi \left[a_2 b''(t) + a_2 b'(t) - \right. \\
 &- a_1 b(t) - a_1 \int b(t) dt \left. \right] - a_1 t \left[a'(\varphi) + \int a(\varphi) d\varphi \right] + \\
 &+ a_2 a'(\varphi) - a_1 \int a(\varphi) d\varphi + f_0(t) - f(\varphi). \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

§ 2. Решение плоской задачи для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора в напряжениях



Фиг. 1.

Полагаем, что на кромках кольцевого сектора внешняя нагрузка распределена симметрично относительно оси x и задана следующим образом (фиг. 1)

$$\left. \begin{aligned}
 a^2 e^i \sigma_r(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi) \\
 a^2 \sigma_r(0, \varphi) &= f_2(\varphi) \\
 a^2 e^i \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= f_3(\varphi) \\
 a^2 \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= f_4(\varphi)
 \end{aligned} \right\} \quad (0 < \varphi < \varphi_1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a^2 e^i \sigma_{\varphi}(t, \varphi_1) &= f_5(t) \\
 a^2 e^i \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) &= f_6(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (0 < t < t_1) \quad (2)$$

где функции f_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) — кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси x имеем также

$$v(t, 0) = \tau_{r\varphi}(t, 0) = 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.9) с ограниченными условиями (2.1) и (2.2).

Согласно (1.8) и (1.13) функции $f(\varphi)$, $f_0(t)$, $a(\varphi)$ и $b(t)$ берем в виде

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= a_0 \varphi \sin \varphi, & f_0(t) &= D_0 e^t, \\ b(t) &= c_0 e^t + c_1 t e^{-t}, & f(\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Разложим функции f_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) в ряд Фурье по функциям $\{\sin \lambda_k \varphi\}$, $\{1; \cos \lambda_k \varphi\}$, $\{\sin \mu_k t\}$ и $\varphi_k(t)$, где

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} e^t & \text{при } k=0 \\ \sin \mu_k t + \mu_k \cos \mu_k t & \text{при } k=1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.4)$$

ортогональность и полнота которых подробно исследованы в работе [10].

Тогда граничные условия (2.1) и (2.2) примут вид

$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{t_1} \tau_r(t_1, \varphi) &= d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \lambda_k \varphi \\ a^2 \tau_r(0, \varphi) &= d_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \cos \lambda_k \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$a^2 e^t \tau_\varphi(t, \varphi_1) = g_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t), \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{t_1} \tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \lambda_k \varphi \\ a^2 \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \sin \lambda_k \varphi \\ a^2 e^t \tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \mu_k t \\ v(t, 0) &= \tau_{r\varphi}(t, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Удовлетворив условиям (2.7), получим

$$G = H = 0, \quad D_0 = 0,$$

$$A_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 = \frac{c_k}{\lambda_k} - C_k \operatorname{sh} \beta_k t_1,$$

$$B_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 = \frac{c_k^{(1)}}{\lambda_k} - D_k \operatorname{sh} \beta_k t_1, \quad (2.8)$$

$$E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1 = \frac{q_k}{\mu_k} - F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1.$$

Подставим значение σ , из (1.17) в (2.5) и умножим обе части полученных равенств на 1 и $\cos \lambda_p \varphi$. После интегрирования по φ от 0 до φ_1 , получим

$$\begin{aligned} (\lambda_p^2 - 1) \Psi_p(t_1) = & \frac{2(-1)^p}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(\gamma_k^2 + 1) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1}{\gamma_k^2 + \lambda_p^2} E_k + \right. \\ & \left. + \frac{(\delta_k^2 + 1) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1}{\delta_k^2 + \lambda_p^2} F_k \right] + \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\lambda_p^2 - 1} + \frac{c_p}{\lambda_p} - d_p, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_p^2 - 1) \Psi_p(0) = & \frac{2(-1)^p}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma_k^2 + 1) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1}{\gamma_k^2 + \lambda_p^2} E_k + \frac{(\delta_k^2 + 1) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1}{\delta_k^2 + \lambda_p^2} F_k \right] + \\ & + \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\lambda_p^2 - 1} + \frac{c_p^{(1)}}{\lambda_p} - d_p^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_0 \sin \varphi_1 + 2c_0 e^{t_1} + c_1 e^{-t_1} = & d_0 + \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{\gamma_k^2 + 1}{\gamma_k^2} E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\delta_k^2 + 1}{\delta_k^2} F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1 \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} 2a_0 \sin \varphi_1 + 2c_0 + c_1 = & d_0^{(1)} - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_k^2 + 1}{\gamma_k^2} E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\delta_k^2 + 1}{\delta_k^2} F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1 \right]. \end{aligned}$$

Подставив значение σ из (1.17) в (2.6), умножив обе части полученного равенства на $\varphi_p(t)$ ($p=0, 1, 2, \dots$) и проинтегрировав по t от 0 до t_1 , получим

$$\begin{aligned} (\mu_p^2 + 1) \Phi_p(\varphi_1) = & \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[A_k \frac{(-1)^p (\alpha_k^2 - 1)}{\alpha_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \right. \\ & - B_k \frac{\alpha_k^2 - 1}{\alpha_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + C_k \frac{(-1)^p (\beta_k^2 - 1)}{\beta_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \beta_k t_1 - \\ & - D_k \frac{\beta_k^2 - 1}{\beta_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \beta_k t_1 \left. \right] - g_p \frac{\mu_p^2 + 1}{\mu_p} - c_1 \frac{8[1 + (-1)^{p+1} e^{-t_1}]}{t_1 (\mu_p^2 + 1)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

при $p \neq 0$ и

$$c_k(e^{2t_1} - 1) - 2c_1 t_1 = \frac{g_0}{2}(e^{2t_1} - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} [A_k e^{t_1} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - B_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + C_k e^{t_1} \operatorname{sh} \beta_k t_1 - D_k \operatorname{sh} \beta_k t_1] \quad (2.12)$$

при $p = 0$.

Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned} (\delta_k^2 - \gamma_k^2) F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1 &= m X_k, \\ (\beta_k^2 - \alpha_k^2) (C_k - D_k) \operatorname{sh} \beta_k t_1 &= (-1)^k Y_k, \\ (\beta_k^2 - \alpha_k^2) (C_k + D_k) \operatorname{sh} \beta_k t_1 &= (-1)^{k+1} Z_k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$m = -\frac{\varphi_1}{t_1}.$$

Произведя замену неизвестных в формулах (2.9) и (2.11), после некоторых преобразований получим следующие бесконечные системы линейных уравнений

$$Y_p = \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} a_{pk} X_k + P_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.14)$$

$$Z_p = \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} b_{pk} X_k + Q_p$$

$$X_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} Y_k + b_p \quad (p = 2, 4, \dots)$$

$$X_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} Z_k + R_p \quad (p = 1, 3, \dots),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{pk} &= \frac{4\alpha_p \beta_p (\beta_p^2 - \alpha_p^2)}{t_1 \left(\beta_p \operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2} - \alpha_p \operatorname{cth} \frac{\beta_p t_1}{2} \right) (\gamma_k^2 + \lambda_p^2) (\delta_p^2 + \lambda_p^2)}, \\ b_{pk} &= \frac{4\alpha_p \beta_p (\beta_p^2 - \alpha_p^2)}{t_1 \left(\beta_p \operatorname{th} \frac{\alpha_p t_1}{2} - \alpha_p \operatorname{th} \frac{\beta_p t_1}{2} \right) (\gamma_k^2 + \lambda_p^2) (\delta_k^2 + \lambda_p^2)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$c_{pk} = \frac{2\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1) (\alpha_k^2 + \mu_p^2) (\beta_k^2 + \mu_p^2)},$$

$$P_p = \frac{\alpha_p \beta_p (\beta_p^2 - \alpha_p^2)}{\alpha_p \operatorname{cth} \frac{\beta_p t_1}{2} - \beta_p \operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2}} \left[\frac{4}{\varphi_1 (\lambda_p^2 - 1)} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + 1) q_k}{\mu_k (\gamma_k^2 + \lambda_p^2)} + \right.$$

$$+ \frac{(-1)^p c_p}{\lambda_p} \left(\frac{1}{\lambda_p^2 - 1} - \frac{\operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2}}{\alpha_p} \right) + \frac{(-1)^p c_p^{(1)}}{\lambda_p} \left(\frac{1}{\lambda_p^2 - 1} + \frac{\operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2}}{\alpha_p} \right) -$$

$$- \frac{(-1)^p (d_p + d_p^{(1)})}{\lambda_p^2 - 1} - \frac{8a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1 (\lambda_p^2 - 1)} \Bigg]; \quad (2.16)$$

$$Q_p = \frac{\alpha_p \beta_p (\beta_p^2 - \alpha_p^2)}{\alpha_p \operatorname{th} \frac{\beta_p t_1}{2} - \beta_p \operatorname{th} \frac{\alpha_p t_1}{2}} \left[\frac{4}{\varphi_1 (\lambda_p^2 - 1)} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + 1) q_k}{\mu_k (\gamma_k^2 + \lambda_p^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{p+1} (c_p - c_p^{(1)})}{\lambda_p} \left(\frac{1}{\lambda_p^2 - 1} + \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha_p t_1}{2}}{\alpha_p} \right) - \frac{(-1)^{p+1} (d_p - d_p^{(1)})}{\lambda_p^2 - 1} \right]; \quad (2.17)$$

$$b_p = \frac{\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1} \left[\frac{2}{\varphi_1 (\mu_p^2 + 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha_k^2 - 1) (c_k - c_k^{(1)})}{\lambda_k (\alpha_k^2 + \mu_p^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{g_p}{m \mu_p} + \frac{q_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1}{m \mu_p \gamma_p} - \frac{8 c_1 [(-1)^{p+1} e^{-t_1} + 1]}{\varphi_1 (\mu_p^2 + 1)^2} \right]; \quad (2.18)$$

$$R_p = \frac{\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1} \left[\frac{2}{\varphi_1 (\mu_p^2 + 1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\alpha_k^2 - 1) (c_k + c_k^{(1)})}{\lambda_k (\alpha_k^2 + \mu_p^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{g_p}{m \mu_p} + \frac{q_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1}{m \mu_p \gamma_p} - \frac{8 c_1 [(-1)^{p+1} e^{-t_1} + 1]}{\varphi_1 (\mu_p^2 + 1)^2} \right]. \quad (2.19)$$

Исключив [неизвестные] коэффициенты Y_k и Z_k в бесконечных системах (2.14), для коэффициентов X_k получим следующие системы бесконечных линейных уравнений

$$X_p = \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} u_{pn} X_n + U_p \quad (p=1, 3, 5, \dots) \quad (2.20)$$

$$X_p = \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} v_{pn} X_n + V_p \quad (p=2, 4, 6, \dots),$$

где

$$u_{pn} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} b_{nk}, \quad U_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} a_k + R_p,$$

$$v_{pn} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} a_{nk}, \quad V_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} p_k + b_p. \quad (2.21)$$

Отметим, что X_{2k} и X_{2k+1} удовлетворяют отдельным уравнениям, то есть значения этих коэффициентов вычисляются независимо друг от друга. Это обстоятельство намного облегчает вычисления при решении конкретных примеров.

Имея значения X_p , из первых двух уравнений (2.14) найдем значения Y_p и Z_p .

Подставляя найденные из (2.8) и (2.13) значения неизвестных коэффициентов в (1.14) и (1.15), для функции напряжений получим следующее выражение

$$F(t, \varphi) = a_0 \varphi \sin \varphi + c_0 e^t + c_1 t e^{-t_1} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{c_k \operatorname{ch} \alpha_k t - c_k^{(1)} \operatorname{ch} \alpha_k (t_1 - t)}{\alpha_k \lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} + \frac{(-1)^{k+1} Y_k}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \alpha_k}{\alpha_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k t_1}{2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{ch} \beta_k \left(t - \frac{t_1}{2} \right)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \frac{t_1}{2}} \right] + \frac{(-1)^{k+1} Z_k}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left[\frac{\operatorname{sh} \beta_k \left(t - \frac{t_1}{2} \right)}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \frac{t_1}{2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k \left(t - \frac{t_1}{2} \right)}{\alpha_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k t_1}{2}} \right] \right] \cos \lambda_k \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{q_k \operatorname{ch} \gamma_k \varphi}{\gamma_k \mu_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1} + \right. \\ \left. + \frac{m X_k}{\delta_k^2 - \lambda_k^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \delta_k \varphi}{\delta_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \varphi}{\gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1} \right] \right\} \cos \mu_k t, \quad (0 \leq t \leq t_1; 0 \leq \varphi \leq \varphi_1), \quad (2.22)$$

где коэффициенты a_0 , c_0 и c_1 определяются из систем уравнений

$$2c_0(e^{t_1} + 1) + \frac{4a_0 \sin \varphi_1}{\varphi_1} + c_1(e^{-t_1} + 1) = \\ = d_0 + d_0^{(1)} - \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + 1) q_k}{\mu_k \gamma_k^2} + \frac{2m}{\varphi_1} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{X_k}{\delta_k^2 \gamma_k^2}, \\ 2c_0(e^{t_1} - 1) + c_1(e^{-t_1} - 1) = d_0 - d_0^{(1)} + \frac{2}{\varphi_1} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(\gamma_k^2 + 1) q_k}{\mu_k \gamma_k^2} - \\ - \frac{2m}{\varphi_1} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{X_k}{\delta_k^2 \gamma_k^2}, \quad (2.23)$$

$$c_0(e^{2t_1} - 1) - 2c_1 t_1 = \frac{4a_0}{2} (e^{2t_1} - 1) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (e^{t_1} c_k - c_k^{(1)})}{\lambda_k}$$

Неизвестные коэффициенты X_k , входящие в соотношения (2.23), определяются из бесконечных систем линейных уравнений (2.20) и

выражаются через постоянные a_0 и c_1 . Подставив определенные значения неизвестных X_k из (2.20) в (2.23) и разрешив полученные соотношения относительно a_0 , c_0 и c_1 , получим их значения.

§ 3. Исследование бесконечных систем (2.20)

Покажем, что полученные бесконечные системы линейных уравнений (2.20) регулярны. В силу (2.15) и (2.21) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} |u_{pn}| &= \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} b_{nk} = \frac{8 \gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{t_1 \varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \times \\ &\quad \frac{\alpha_k \beta_k (\beta_k^2 - \alpha_k^2)}{\beta_k \operatorname{cth} \frac{\alpha_k t_1}{2} - \alpha_k \operatorname{cth} \frac{\beta_k t_1}{2}} = \\ &= \frac{\alpha_1}{a_2} \frac{2 \gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2) (\beta_k^2 + \mu_p^2)} = \\ &= 1 - \frac{\delta_p^2 - \gamma_p^2}{\varphi_1 \gamma_p \delta_p (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} < 1; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} |v_{pn}| &= \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} \Omega_{nk} = \frac{8 \gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{t_1 \varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \times \\ &\quad \frac{\alpha_k \beta_k (\beta_k^2 - \alpha_k^2)}{\beta_k \operatorname{cth} \frac{\alpha_k t_1}{2} - \alpha_k \operatorname{cth} \frac{\beta_k t_1}{2}} = \\ &= \frac{\alpha_1}{a_2} \frac{2 \gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 2(\beta_k^2 - \alpha_k^2)}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2) (\beta_k^2 + \mu_p^2)} < \\ &< \frac{\alpha_1}{a_2} \frac{2 \gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2) (\beta_k^2 + \mu_p^2)} = \\ &= 1 - \frac{\delta_p^2 - \gamma_p^2}{\varphi_1 \delta_p \gamma_p (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} < 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При этом использованы значения рядов [11]

$$\begin{aligned} \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k^2 + \lambda_p^2) (\delta_k^2 + \lambda_p^2)} &= \frac{\alpha_1}{a_2} \frac{1}{\beta_p^2 - \alpha_p^2} \left(\frac{t_1}{4 \alpha_p} \operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{t_1}{4 \beta_p} \operatorname{cth} \frac{\beta_p t_1}{2} - \frac{1}{2 \alpha_p^2} + \frac{1}{2 \beta_p^2} \right), \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k^2 + \lambda_p^2)(\beta_k^2 + \lambda_p^2)} = \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{\beta_p^2 - \alpha_p^2} \left(\frac{t_1}{4\alpha_p} \operatorname{th} \frac{\alpha_p t_1}{2} - \frac{t_1}{4\beta_p} \operatorname{th} \frac{\beta_p t_1}{2} \right), \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2)(\beta_k^2 + \mu_p^2)} = \frac{a_3}{a_1} \frac{1}{\beta_p^2 - \gamma_p^2} \left(\frac{\varphi_1}{2\gamma_p} \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi_1}{2\beta_p} \operatorname{cth} \beta_p \varphi_1 - \frac{1}{2\gamma_p^2} + \frac{1}{2\beta_p^2} \right)$$

и неравенств

$$O < \frac{2(\alpha_p^2 - \beta_p^2)}{t_1 \alpha_p \beta_p \left(\beta_p \operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2} - \alpha_p \operatorname{cth} \frac{\beta_p t_1}{2} \right)} < 1$$

$$O < \frac{\beta_p^2 - \gamma_p^2}{\varphi_1 \beta_p \gamma_p (\beta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \beta_p \varphi_1)} < 1, \quad (3.4)$$

Таким образом, мы получили, что бесконечные системы регулярны.

Легко видеть из (2.16)–(2.19) и (2.21), что свободные члены этих систем при $\lambda_p \neq 1$ ограничены. Покажем, что при $\lambda_p = 1$ эти члены не обращаются в бесконечность. Для этого нужно только показать, что при $\lambda_p = 1$ $Q_p < \infty$.

Составим уравнение равновесия ($\Sigma F_x = 0$) для рассматриваемого случая.

В силу симметрии оно будет иметь вид

$$-\int_0^{\varphi_1} \tau_r(t_1, \varphi) \sin \varphi ds + \cos \varphi_1 \int_a^b \tau_r(t, \varphi_1) dr + \int_0^{\varphi_1} \tau_r(0, \varphi) \sin \varphi ds_1 +$$

$$+ \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(t_1, \varphi) \cos \varphi ds - \int_0^{\varphi_1} \sigma_r(0, \varphi) \cos \varphi ds_1 - \sin \varphi_1 \int_a^b \sigma_r(t, \varphi_1) dr = 0. \quad (3.5)$$

Подставив сюда значения напряжений на контуре из (2.21), получим условия равновесия в следующем виде:

$$2 \cos \varphi_1 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^{(1)} - c_k) \frac{\lambda_k (-1)^{k+1} \sin \varphi_1}{\lambda_k^2 - 1} + (d_0 - d_0^{(1)}) \sin \varphi_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - d_k^{(1)}) \frac{(-1)^{k+1} \sin \varphi_1}{\lambda_k^2 - 1} - \sin \varphi_1 \int_a^b \sigma_r(t, \varphi_1) dr = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6), переходя к пределу, когда $\lambda_k \rightarrow 1$ (то есть $\varphi_1 = \pi$ при $k=1$), получим

$$\frac{4(-1)^n}{n\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{q_k}{\mu_k} + c_p^{(1)} - c_p = 0. \quad (3.7)$$

Из значения Q_p видно, что выражение в квадратных скобках при $\lambda_k \rightarrow 1$ с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (3.7), то есть обращается в нуль того же порядка, как и $\lambda_k - 1$.

Таким образом, при $\lambda_k = 1$ выражение Q_p обращается в неопределенность типа $0/0$. Перейдя к пределу, легко можно вычислить значения Q_p при $\lambda_k = 1$.

Итак, мы доказали, что свободные члены систем (2.20) всегда ограничены сверху. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией регулярных систем линейных уравнений [12] и оценить неизвестные коэффициенты с любой точностью.

Для изотропного тела

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{E}, \quad a_3 = -\frac{\nu}{E}, \quad a_4 = \frac{2(1+\nu)}{E}, \quad a_5 = \frac{2}{E}, \quad (3.8)$$

$$\alpha_k = \lambda_k + 1, \quad \beta_k = \lambda_k - 1, \quad \gamma_k = \mu_k + i, \quad \delta_k = \mu_k - i.$$

Подставляя эти значения в (2.14)–(2.19) и (2.22), получим решение плоской задачи теории упругости для изотропного кольцевого сектора, рассмотренной в работе [10]. Аналогично можно решить плоскую задачу теории упругости для кольцевого сектора, изготовленного из ортотропного материала, когда внешняя нагрузка распределена несимметрично относительно оси x .

§ 4. Об одной смешанной задаче для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора

Рассмотрим ортотропную пластинку в виде кольцевого сектора, когда на криволинейных частях границы заданы напряжения, а на прямолинейных частях известны касательные напряжения и нормальные перемещения (фиг. 2), то есть

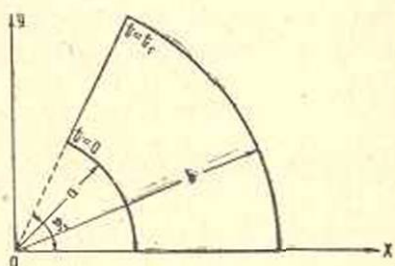
$$\left. \begin{aligned} a^2 e^{i\sigma_r}(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \lambda_k \varphi \\ a^2 \sigma_{\theta\theta}(0, \varphi) &= f_2(\varphi) = d_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \cos \lambda_k \varphi \\ a^2 e^{i\sigma_{r\varphi}}(t_1, \varphi) &= f_3(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \lambda_k \varphi \\ a^2 \tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= f_4(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \sin \lambda_k \varphi \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \varphi \leq \varphi_1) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
 a^2 e^t \tau_{r_2}(t, \varphi_1) &= f_5(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \mu_k t \\
 a^2 e^t \tau_{r_2}(t, 0) &= f_6(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(1)} \sin \mu_k t \\
 av(t, \varphi_1) &= g_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t) \\
 av(t, 0) &= g_0^{(1)} \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(1)} \varphi_k(t)
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (4.2)$$

Эта задача сводится к решению уравнения (1.9) с граничными условиями (4.1) и (4.2).

В силу (1.8) и (1.13) выберем функции $f(\varphi)$, $f_0(t)$, $a(\varphi)$ и $b(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 a(\varphi) &= A_0, \quad f_0(t) = D_0 e^t, \\
 b(t) &= c_0 e^t, \quad f(\varphi) = F_0 \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \quad (4.3)$$



Фиг. 2.

Удовлетворяя условиям (4.1), (4.2) и пользуясь соотношениями (1.17), для неизвестных коэффициентов A_k , B_k , C_k , D_k , E_k , G_k , F_k и H_k получим следующие значения:

$$\begin{aligned}
 A_k &= \frac{c_k}{\lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} - C_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1}, \quad B_k = \frac{c_k^{(1)}}{\lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} - D_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1}, \\
 C_k &= \frac{1}{\Delta_k} \left\{ Q_k \left(\frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1}{\beta_k} - \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1 \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\alpha_k} \right) - Q_k^{(1)} \left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c_k}{\alpha_k \lambda_k} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\alpha_k} - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} \beta_k t_1 - 1}{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) + \frac{c_k^{(1)}}{\alpha_k \beta_k \lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1 - \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right\}, \\
 D_k &= \frac{1}{\Delta_k} \left\{ Q_k \left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) - Q_k^{(1)} \left(\frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1}{\beta_k} - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1 \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c_k}{\alpha_k \beta_k \lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1 - \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} + \frac{c_k^{(1)}}{\alpha_k \lambda_k} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\alpha_k} - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} \beta_k t_1 - 1}{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) \right\}, \quad (4.4) \\
 E_k &= \frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1} \left(\frac{q_k}{\mu_k} - \delta_k^2 M_k \right), \quad F_k = \frac{-\delta_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1} \left(\frac{q_k}{\mu_k} - \gamma_k^2 M_k \right), \\
 G_k &= \frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1} \left(\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} - \delta_k^2 M_k^{(1)} \right), \\
 H_k &= \frac{-\delta_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1} \left(\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} - \gamma_k^2 M_k^{(1)} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_k = \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{\alpha_k^2 \beta_k^2} \operatorname{sh}^2 \beta_k t_1 - \frac{2}{\alpha_k \beta_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1 (\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} \beta_k t_1 - 1)}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1},$$

$$Q_k = \frac{1}{\lambda_k^2 - 1} \left[\frac{c_k}{\lambda_k} - d_k + \frac{2}{\varphi_1} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} N_{pk} \right],$$

$$Q_k^{(1)} = \frac{1}{\lambda_k^2 - 1} \left[\frac{c_k^{(1)}}{\lambda_k} - d_k^{(1)} + \frac{2}{\varphi_1} \sum_{p=1}^{\infty} N_{pk} \right],$$

$$N_{pk} = \frac{q_p^{(1)} + (-1)^k q_p}{\mu_p (\gamma_p^2 - \delta_p^2)} \left[\frac{\gamma_p^2 (\gamma_p^2 + 1)}{\gamma_p^2 + \lambda_k^2} + \frac{\delta_p^2 (\delta_p^2 + 1)}{\delta_p^2 + \lambda_k^2} \right] - \\ - [M_p^{(1)} + (-1)^k M_p] \frac{\gamma_p^2 \delta_p^2}{\gamma_p^2 - \delta_p^2} \left[\frac{\gamma_p^2 + 1}{\gamma_p^2 + \lambda_k^2} + \frac{\delta_p^2 + 1}{\delta_p^2 + \lambda_k^2} \right], \quad (4.5)$$

$$M_k = \frac{2\mu_k}{t_1 (\mu_k^2 + 1) (a_3 \mu_k^2 + a_1)} \left[(a_1 + a_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q_p \mu_k [(-1)^{k+p} - 1]}{\mu_p (\mu_k^2 - \mu_p^2)} + \right. \\ \left. + \frac{t_1 q_k (a_2 \mu_k^2 - a_1)}{2\mu_k^3} - F_0 \cos \varphi_1 \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\mu_k} - \right. \\ \left. - a_1 \varphi_1 A_0 \frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k} - \frac{t_1 g_k}{2} (\mu_k^2 + 1) \right],$$

$$M_k^{(1)} = \frac{2\mu_k}{t_1 (\mu_k^2 + 1) (a_3 \mu_k^2 + a_1)} \left[(a_1 + a_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{q_p^{(1)} \mu_k [(-1)^{k+p} - 1]}{\mu_p (\mu_k^2 - \mu_p^2)} + \right. \\ \left. + \frac{t_1 q_k^{(1)} (a_2 \mu_k^2 - a_1)}{2\mu_k^3} - F_0 \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\mu_k} - \frac{t_1 g_k^{(1)}}{2} (\mu_k^2 + 1) \right].$$

Знак (*) при $\sum_{p=1}^{\infty}$ означает следующее: если в выражении под суммой k — четное число, то p принимает только нечетные значения и, наоборот, если k — нечетное, то p принимает только четные значения.

Для определения неизвестных коэффициентов A_0 , c_0 , D_0 , F_0 получим следующие уравнения:

$$2c_0 e^{t_1} + A_0 = d_0 - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k N_{k0},$$

$$2c_0 + A_0 = d_0^{(1)} - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} N_{k0}^{(1)},$$

$$(a_1 + a_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k [1 + (-1)^{k+1} e^{t_1}]}{\mu_k^2 + 1} + [2(a_2 - a_1) \varphi_1 c_0 + D_0] \frac{e^{2t_1} - 1}{2} -$$

$$-a_1 \varphi_1 A_0 t_1 e^{t_1} - F_0 \cos \varphi_1 (e^{t_1} - 1) - \frac{g_0}{2} (e^{2t_1} - 1) = 0, \quad (4.6)$$

$$(a_1 + a_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^{(1)} [1 + (-1)^{k+1} e^{t_1}]}{a_k^2 + 1} + D_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} - \\ - F_0 (e^{t_1} - 1) - \frac{g_0^{(1)}}{2} (e^{2t_1} - 1) = 0.$$

Подставляя значения (4.5) и (4.6) в (1.14) и пользуясь соотношениями (1.15) и (4.3), получим выражения для функции напряжений $F(t, \varphi)$.

Решение данной задачи в случае изотропного материала получается из (4.5) и (4.6) предельным переходом, используя при этом формулы (3.8).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 XI 1963

Ա. Հ. ՔԱՐԱՅԱՆ, Վ. Ս. ՏԱՆՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏԵՍՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՕՐԹՈՏՐՈՂ ՍԱՆԻ ԸՍՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո լ լ

Հոդվածում դիտարկված է առաձգականության տեսության որոշ հարկ խնդիրների հնչրիա լուծումը օղակալին սեկտորի տեսք ունեցող օրթոտրոպ սանիի համար, երբ սեկտորի եզրերում եղրալին պլանմանները տրված են ω լարումներով և μ խառը տեսքով: Այդ խնդիրները բերվում են մի բե-
հարմանիկ ֆունկցիալի որոշմանը, որը ներկայացվում է Ֆուրիեի շարքերի տեսքով:

Խնդրման հաստատունների որոշումը առաջին խնդրում հանդում է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխառնների լուծմանը:

Ցույ է տրվում, որ այդ սխառնները սեղուլար են, իսկ ազատ ան-
ղանները՝ սահմանափակ: Երկրորդ խնդիրը լուծվում է առանց գծալին ան-
վերջ հավասարումների սխառնների օգտագործման:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 86, 1938.
2. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 6, вып. 6, 1942.
3. Шерман Д. И. Новое решение плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ДАН СССР, 32, № 5, 1941.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

5. *Лехницкий С. Г.* Плоская задача теории упругости для тела с цилиндрической анизотропией. Ученые записки Саратовского гос. университета им. Н. Г. Чернышевского, т. I (XIV), серия физ.-мат. наук, вып. 2, 1938.
6. *Савин Г. Н.* Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды. Труды института строительной механики УАН, № 32, 1938.
7. *Михлин С. Г.* Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 76, 1936.
8. *Тимошенко С. П.* Теория упругости, ОНТИ—ГТТИ, Л., 1934.
9. *Абрамян Б. Л., Баблюк А. А.* Кручение круглых стержней с продольными выточками. ПММ, 24, 2, 1960.
10. *Баблюк А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 1, 1962.
11. *Гончаров В. Л.* Теория функций комплексного переменного. Учпедгиз, М., 1955.
12. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.