ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ш. АСАТУРЯН, Ю. П. КИЧАЕВ

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ УПРУГОСТИ

Имеется обширная литература, посвященная крутильным колебаниям цилиндрических валов при линейном законе деформации.

Существует ряд задач, имеющих большое практическое значение, при рассмотрении которых необходимо обращаться к нелинейной теории крутильных колебаний, например, крутильные колебания стержней из материала с естественной нелинейностью. К таким материалам относятся различные детали машин из пластических масс на основе эпоксидных смол и др.

Допустим, что для углов сдвига при кручении можно взять такие же выражения, как и в линейной теории, то есть

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \psi_{xy} = 0, \quad \psi_{yz} = \omega x, \quad \psi_{xz} = -\omega y, \tag{0.1}$$

где $\omega = \omega(z, t) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ является углом закручивания на единицу длины стержня.

Для интенсивности деформации сдвига из соотношения (0.1) непосредственно следует, что

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3}(\psi_{yz}^2 + \psi_{xz}^2) = \frac{2}{3}\omega^2 r^2 = \frac{2}{3} r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2, \tag{0.2}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

В нелинейной технической теории упругости связь между компонентами тензора деформации и тензором напряжения устанавливается следующими уравнениями [1]

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{yz} = G(1 + \gamma\psi_0^2)\psi_{yz}, \quad \tau_{xz} = G(1 + \gamma\psi_0^2)\psi_{xz}.$$

Очевидно, что результирующее касательное напряжение в сечениях цилиндра плоскостями $z = \text{const}$, будет равно

$$T = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, G(1 + \gamma\psi_0^2)\psi_0. \tag{0.3}$$

здесь G — модуль сдвига,

γ — модуль интенсивности касательных напряжений.

Для модуля интенсивности касательных напряжений предлагается следующее соотношение [1]

$$\gamma = -\frac{NG^2(3K+G)}{K}, \tag{0.4}$$

где G — модуль сдвига, $н/см^2$,

K — модуль объемного сжатия $н/см^2$,

N — постоянная материала, например:

для меди $N = 0{,}177 \cdot 10^{-8} \frac{см^4}{Н^2}$,

для стали $N = 0{,}25 \cdot 10^{-8} \frac{см^4}{Н^2}$.

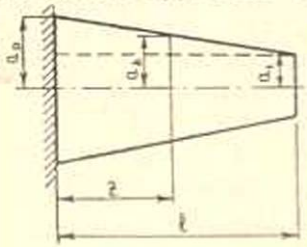
Соотношения (0.3) и (0.4) характеризуют не только нелинейный закон упругости, но, например, служат некоторым выражением пластических деформаций в зоне упрочнения.

§ 1. Нелинейные свободные крутильные колебания стержней переменного поперечного сечения

Крутильное колебание цилиндрического стержня, при нелинейном законе упругости, с постоянным поперечным сечением и заделанными концами рассмотрено в работе [1].

В данной работе приводится исследование при различных граничных условиях свободных нелинейных крутильных колебаний стержней переменного сечения, являющихся телами вращения относительно геометрической оси симметрии.

Итак, рассмотрим в декартовой системе координат стержень переменного кругового сечения. Пусть для недеформированного стержня его ось симметрии совпадет с осью z, а плоскость сечения — с плоскостью xoy (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для исследования нелинейного крутильного колебания упругой системы воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. По принципу Гамильтона-Остроградского для консервативной системы сил при изохронной вариации имеем соотношение

$$F = \int_0^{t_1} (A - E)\, dt, \quad \delta F = 0. \tag{1.1}$$

Здесь A — полная работа упругих сил,

E — кинетическая энергия стержня.

Удельная работа деформации при кручении стержня, вызванная касательными напряжениями T, будет

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{dz}\right)=\int_0^{\psi_0} T\,d\psi_0.$$

Подставляя сюда значение T из уравнения (0.3) и интегрируя от 0 до ψ_0, получим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{dz}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,G\left(1-\frac{\gamma}{2}\psi_0^2\right)\psi_0^2.$$

Так как $\psi_0=\frac{2}{3}r^2\omega^2=\frac{2}{3}r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$, то из предыдущего

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{dz}\right)=\frac{G}{\sqrt{6}}\left[1+\frac{\gamma}{3}r^2\left(\frac{\partial\varphi}{dz}\right)^2\right]r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Интегрируя по площади S поперечного сечения, найдем работу деформации сдвига на единицу длины стержня

$$\frac{dA}{dz}=\frac{G}{\sqrt{6}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\iint_S r^2dxdy+\frac{\gamma}{3}\left(\frac{\partial\varphi}{dz}\right)^4\iint_S r^4dxdy\right].$$

Вводя в рассмотрение моменты инерции сечения

$$I_1=\iint_S r^2dxdy,\qquad I_2=\iint_S r^4dxdy, \tag{1.2}$$

при этом работа деформации для всего стержня будет иметь вид

$$A=\int_0^l\frac{dA}{dz}\,dz=\frac{G}{\sqrt{6}}\int_0^l\left[I_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{\gamma I_2}{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^4\right]dz. \tag{1.3}$$

Кинетическую энергию стержня определяем путем интегрирования живой силы отдельных элементов высотой dz при кручении, то есть

$$E=\frac{\rho}{2}\int_0^l I_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dz, \tag{1.4}$$

где ρ — плотность материала стержня.

Подставляя (1.3) и (1.4) в уравнение (1.1) будем иметь

$$F=\int_0^{t_1}\int_0^l\left[\frac{I_1G}{\sqrt{6}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{\gamma I_2}{3\sqrt{6}}G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^4-\frac{\rho I_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]dtdz. \tag{1.5}$$

Для упрощения дальнейших вычислений, примем следующие обозначения

$$t_1=\frac{2\pi}{p},\qquad \tau=pt,\qquad \xi=\frac{kz}{l}, \tag{1.6}$$

$$I_1 = I_{01} f_1(z) = I_{01} f_1(\xi), \quad I_2 = I_{02} f_2(z) = I_{02} f_2(\xi), \tag{1.7}$$

где индекс 0 показывает, что все величины вычислены в заделанном сечении стержня, τ — безразмерное время, ξ — безразмерная координата, p — частота собственных колебаний стержня, k — безразмерный параметр, подлежащий определению.

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{k}{l}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} p, \tag{1.8}$$

то на основании (1.6), (1.7) и (1.8) уравнение (1.5) примет вид

$$F = \frac{\rho I_{01} l}{2kp} \int_0^{2\pi} \int_0^k \left\{ \alpha^2 f_1(\xi) \left[1 + \frac{\lambda f_2(\xi)}{f_1(\xi)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - p^2 f_1(\xi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 \right\} d\xi d\tau, \tag{1.9}$$

где для сокращения записи приняты следующие обозначения

$$\alpha^2 = \frac{2}{\rho} \frac{k^2}{l^2} \frac{G}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k^2 G}{\rho l^2},$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{3} \frac{I_{02}}{I_{01}} \frac{k^2}{l^2} = \frac{\gamma}{3} \frac{\frac{2}{9}\pi a^6}{\frac{\pi a^4}{2}} = \frac{4}{27} \frac{a^2}{l^2} \gamma k^2, \tag{1.10}$$

где a — радиус данного сечения.

Из (1.9) следует, что уравнение Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи $\delta F = 0$ является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных с переменными коэффициентами. Поэтому вариационную задачу будем решать приближенно. Для этого величину $\varphi(z, t)$ будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от координаты ξ, а вторая — только от безразмерного времени τ, то есть

$$\varphi(\xi, \tau) = R(\xi)\, q(\tau). \tag{1.11}$$

Подставляя функцию (1.11) в формулу (1.9), получим

$$F = \frac{\rho I_m l}{2kp} \int_0^{2\pi} \left| \alpha^2 q^2 \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi + \alpha^2 \lambda q^4 \int_0^k f_2(\xi) \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^4 d\xi - \right.$$

$$\left. - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \int_0^k f_1(\xi) R^2(\xi)\, d\xi \right| d\tau.$$

Для простоты обозначим

$$b_0 = \int_0^k f_1(\xi) R^2(\xi)\, d\xi, \qquad \vartheta^2 = \frac{1}{b_0}\int_0^k f_1(\xi)\left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi,$$

$$b_1 = \frac{1}{\vartheta^2 b_0}\int_0^k f_2(\xi)\left(\frac{dR}{d\xi}\right)^4 d\xi. \tag{1.12}$$

Тогда для действия F по Гамильтону-Остроградскому получим следующее значение

$$F = \frac{\rho I_{01} l b_0}{2kp}\int_0^{2\pi}\left[\vartheta^2\alpha^2(q^2 + \lambda b_1 q^4) - p^2\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2\right]d\tau. \tag{1.13}$$

По принципу Гамильтона-Остроградского для консервативной системы сил при изохронной вариации из формул (1.1) и (1.13) получим

$$\delta F = \int_0^{2\pi}\delta L\, d\tau = 0,$$

где

$$L = \vartheta^2\alpha^2 q^2 + \vartheta^2\alpha^2\lambda b_1 q^4 - p\left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2.$$

Отсюда, для действительного движения вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа в обобщенных координатах запишется в виде

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + p_1^2(q + \lambda_1 q^3) = 0. \tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) описывает свободные колебания материальной точки или физического маятника с нелинейной восстанавливающей силой.

Интегрируя уравнение (1.14) от начального положения Q до q, где Q — наибольшая начальная амплитуда крутильных колебаний системы в радианах, получим

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{p_1\sqrt{2 + \lambda_1 Q^2}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - \chi^2\sin^2\vartheta}}, \tag{1.15}$$

где

$$\eta = \frac{q}{Q} = \sin\vartheta \quad \text{и} \quad -\chi^2 = \frac{\lambda_1 Q^2}{2 + \lambda_1 Q^2} < -1;$$

χ — модуль эллиптического интеграла.

Так как полный период колебаний должен иметь значение 2π, то из (1.15) следует соотношение

$$2\pi = \frac{4\sqrt{2}\,K(\chi)}{p_1\sqrt{2 + \lambda_1 Q^2}},$$

где

$$K(\varkappa) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\chi^2 \sin^2 \theta}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Отсюда следует, что

$$p_1 = \frac{2\sqrt{2}\, K(\chi)}{\pi\sqrt{2+\lambda_1 Q^2}}.$$

Или, переходя к размерным величинам, для частоты колебания будем иметь

$$p = \frac{\pi a \vartheta}{2K(\varkappa)} \sqrt{1+\lambda b_1 Q^2},$$

$$-\chi^2 = \frac{\lambda b_1 Q^2}{1+\lambda b_1 Q^2} \leqslant -1. \tag{1.16}$$

Из соотношения (1.16) видно, что частота крутильных колебаний валов зависит от начальной амплитуды. С увеличением амплитуды частота собственных колебаний уменьшается вследствие увеличения функции $K(\chi)$ и уменьшения подкоренного выражения. Из модуля эллиптического интеграла непосредственно следует, что отношение

$$|\lambda b_1 Q^2| < \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь собственные колебания стержня переменного сечения с одним закрепленным концом (фиг. 1). Граничные условия при этом будут

$$\varphi\Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\Big|_{\xi=k} = 0. \tag{1.17}$$

Так как эллиптический интеграл есть функция верхнего предела η_1, то обратная функция от τ определяется эллиптической функцией Якоби в виде [3]

$$\eta_1 = \operatorname{Sn} \tau.$$

Подставляя сюда значение амплитуды η_1, будем иметь

$$q = Q \operatorname{Sn} \tau. \tag{1.18}$$

На основании (1.17) и (1.18) уравнение (1.11) в первом приближении при нелинейном колебании примет вид

$$\varphi(\xi, \tau) = R(\xi)\, q(\tau) = Q \sin \xi \operatorname{sn} \tau, \tag{1.19}$$

где по-прежнему

$$\xi = \frac{kz}{l}, \quad \tau = pt, \quad k = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

В формуле (1.19) начальная амплитуда колебания заранее нам не известна, но ее можно определить из условия максимального ка-

сательного напряжения. Так как касательное напряжение при кручении определяется соотношением

$$\tau_1 = Ga\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то отсюда на основании (1.19) максимальное напряжение будет

$$\tau_{1\max} = \frac{QakG}{l},$$

причем $|\cos\xi|_{\max}=1$, но, как известно [3], $|\mathrm{sn}\,\tau|_{\max}=1$.

Решая последнее соотношение относительно амплитуды, будем иметь

$$Q = \frac{l}{ka}\frac{\tau_{1\max}}{G}. \tag{1.20}$$

Таково значение амплитуды в зависимости от начального максимального напряжения, вызванного парой сил.

Вычислим значение коэффициента $\lambda b_1 Q^2$.

Подставляя значение $\lambda b_1 Q^2$ из (1.10) и начальной амплитуды из (1.20), получим

$$\lambda b_1 Q^2 = b_1\frac{\gamma}{3}\frac{I_{02}}{I_{01}}\frac{k^2}{l^2}\frac{l^2}{k^2a^2}\frac{\tau_{1\max}^2}{G^2}.$$

Так как $\frac{I_{02}}{I_{01}} = \frac{4}{9}a^2$, то из последнего соотношения следует, что

$$\lambda b_1 Q^2 = \frac{4}{27}\gamma b_1\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2, \tag{1.21}$$

где $\gamma<0$.

Подставляя значение a из (1.10) в формулу (1.16) и учитывая (1.21), после несложных преобразований для частоты свободных колебаний при нелинейном законе упругости получим следующее выражение:

$$\frac{2}{\pi}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\,l\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,p = \frac{k0}{K(\chi)}\sqrt{1+\frac{4}{27}b_1\gamma\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2},$$

$$\chi^2 = -\frac{4b_1\gamma\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2}{27+4b_1\gamma\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2}, \qquad k=\frac{(2n+1)\pi}{2}. \tag{1.22}$$

В случае вала со свободными концами граничные условия будут

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=k}=0.$$

В этом случае в первом приближении уравнение упругой линии (1.2) примет вид

$$\varphi(\xi,\tau) = R(\xi)\,q(\tau) = Q\cos\xi\,\mathrm{sn}\,\tau, \tag{1.23}$$

а частота собственных колебаний определится из (1.22), причем здесь нужно принять, что $k = n\pi$.

В формуле (1.22) величины ϑ и b_1 определяются из выражения (1.13).

§ 2. Примеры

Для того, чтобы определить частоту собственных колебаний стержней переменного сечения по формуле (1.22), необходимо знать закон изменения моментов инерции вдоль оси z. Для конического вала закон изменения радиуса будет

$$a_z = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{l} z.$$

Переходя к безразмерным координатам, получим

$$a_z = a_0 \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi\right).$$

Учитывая последнее выражение, придадим формуле (1.7) вид

$$I_1 = I_{01} f_1(\xi) = \frac{\pi a_0^4}{k} \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi\right)^4,$$

$$I_2 = I_{02} f_2(\xi) = \frac{2\pi a^6}{9} \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi\right)^6.$$

Отсюда

$$f_1(\xi) = \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi\right)^4, \qquad f_2(\xi) = \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi\right)^6. \tag{2.1}$$

Аналогичным путем можем определить значение функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ для параболоида вращения (фиг. 2)

$$f_1(\xi) = \left[1 - \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\xi\right]^2, \qquad f_2(\xi) = \left[1 - \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)\xi\right]^3. \tag{2.2}$$

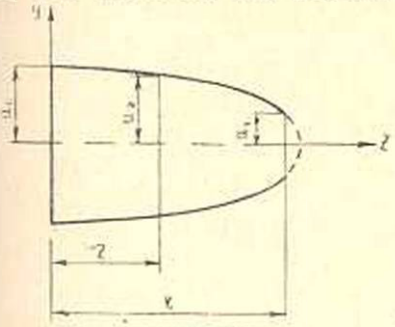
Легко составить выражения функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ для ступенчатого вала. Например, фиг. 3,

$$f_1(\xi) = 1, \quad f_2(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi < \frac{k}{4};$$

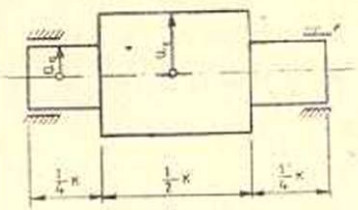
$$f_1(\xi) = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^4, \quad f_2(\xi) = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^6 \quad \text{при} \quad \frac{k}{4} < \xi < \frac{3k}{4};$$

$$f_1(\xi)=1, \quad f_2(\xi)=1 \quad \text{при} \quad \frac{3k}{4}<\xi\leqslant k. \tag{2.3}$$

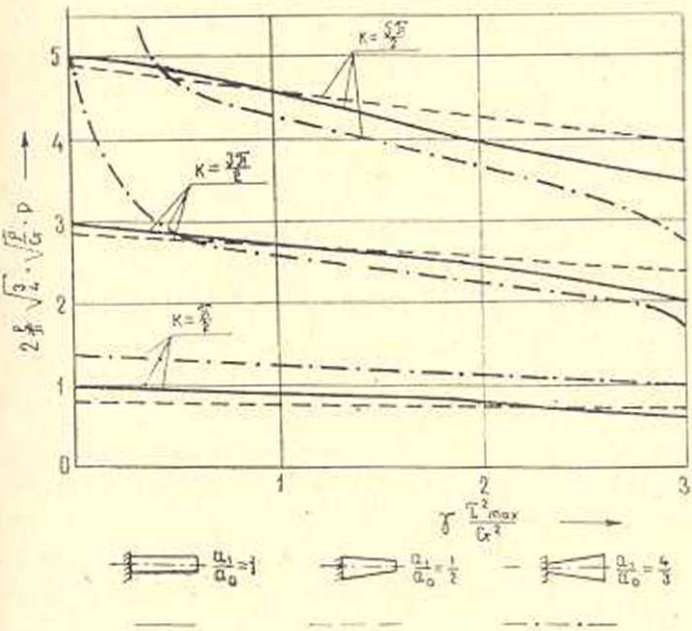
На основании (2.1), (2.2) и (2.3) вычислены значения параметров ϑ и b_1. Эти величины для различных отношений приведены в табл. 1.



Фиг. 2



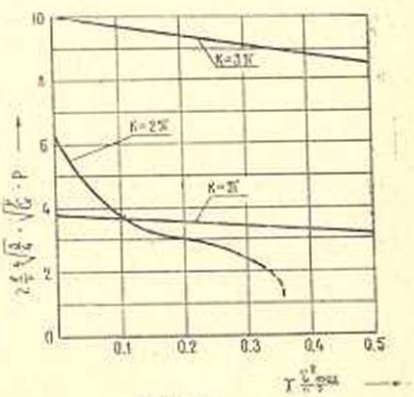
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Из табл. 1 следует, что числовые величины ϑ и b_1 асимптотически приближаются к значению прямого цилиндра.

Частоты собственных крутильных колебаний стержней для сечения (2.1), (2.3), подсчитанные по формуле (1.22), приведены на графиках фиг. 4 и 5 для конического и ступенчатого валов соответственно. Эти графики полностью отражают эффект нелинейности.



Фиг. 5.

Таблица 1

	$\frac{a_1}{a_0}$	ϑ			b_1		
		$k=\frac{\pi}{2}$	$k=\frac{3\pi}{2}$	$k=\frac{5\pi}{2}$	$k=\frac{\pi}{2}$	$k=\frac{3\pi}{2}$	$k=\frac{5\pi}{2}$
Вал конический	0,5	0,808	0,950	0,980	0,130	0,487	0,523
	0,75	0,845	0,976	0,990	0,522	0,602	0,606
Вал конический	$\frac{4}{3}$	1,348	1,03	1,008	0,62	1,018	1,046
Вал цилиндрический	1,0	1,0	1,0	1,0	0,75	0,75	0,75
Вал с боковой поверхностью в виде параболоида вращения	0,5	0,627	0,98	0,985	0,184	0,554	0,556
	0,75	0,795	0,975	0,990	0,442	0,599	0,610

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 26 XI 1963

Ա. Շ. ԱՍԱՏՈՒՐՅԱՆ, Յու. Պ. ԿԻՉԱԵՎ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԶՈՂԵՐԻ ՈՐՈՐՄԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերվում է պատման մասմիններ հանդիսացող փոփոխական հատվածքի ձողերի ազատ ոչ գծային ոլորման տատանումների ուսումնասիրությունը սահմանային պայմանների դեպքում: Ձողերի ոլորման անհական տատանումների հաճախականությունը որոշելու համար կիրառվում է Համիլտոն-Օստրոգրադսկու վարիացիոն սկզբունքը: Առաձգականության ոչ-գծային օրենքի դեպքում ազատ տատանումների հաճախականության համար ստացված է հետևյալ բանաձևը

$$\frac{2}{\pi}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\,l\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,p=\frac{k\vartheta}{K(x)}\sqrt{1+\frac{4}{27}\,b_1\,\gamma\left(\frac{\tau_{max}}{G}\right)^2}\,;$$

Բերված աղյուսակներն ու գրաֆիկները բնութագրում են ոչ-գծայնության և հատվածքի փոփոխականության էֆեկտները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. ИЛ, 1961.
2. *Асатурян А. Ш., Качаев П. М.* Изгибные колебания стержней при нелинейном законе упругости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 5, 1962.
3. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1949.