ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 4, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. М. Седракян

Дифракционное излучение точечной заряженной частицы

1. В настоящей работе рассматривается излучение точечной заряженной частицы, пролетающей мимо полубесконечного металлического экрана. Это излучение можно представить себе как дифракцию поля частицы на экране. В работах [1,2] было рассмотрено излучение частицы, пролетающей мимо металлического экрана, когда траектория частицы перпендикулярна ребру экрана. Представляет интерес рассмотреть излучение, когда угол между скоростью частицы и ребром экрана отличается от прямого. В частности, интересно рассмотреть излучение частицы, движущейся под малым углом к ребру экрана. Ниже точно рассмотрена задача излучения заряда, когда угол между его скоростью и ребром полуплоскости меняется в пределах от 0 до π.

Пусть экран представляет собой полубесконечную, идеальнопроводящую полуплоскость $y=0$, $x>0$, $-\infty<z<\infty$, а частица движется в плоскости, параллельной плоскости (yz) и находящейся на расстоянии a от ребра (или оси z). Траектория частицы составляет с плоскостью и с ребром экрана угол θ.

Потери энергии на излучение настолько малы, что можно предполагать, что скорость частицы v постоянна.

Излучение частицы при наличии экрана можно рассмотреть, как излучение токов и зарядов, наведенных на плоскости экрана при прохождении частицы мимо экрана. Обозначим через $A=\{\vec{A}, \varphi\}$ векторный и скалярный потенциалы поля наведенных токов и зарядов, а $A^0=\{\vec{A}^0, \varphi^0\}$—потенциалы полей движущейся частицы в пустоте. Для калибровки потенциалов мы примем условие Лоренца $\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$.

2. Потенциалы A удовлетворяют неоднородному волновому уравнению

$$\Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=4\pi j, \tag{1}$$

где $j=\left\{\frac{\vec{j}}{c}, \rho\right\}$ есть наведенные на экране токи и заряды. Решение уравнения (1) имеет вид

$$A_\omega(x, y, q) = i\pi\int_0^\infty dx' H_0^{(1)}(p\sqrt{(x-x')^2+y^2})\, j(x'),$$

где

$$A(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_\omega(x, y, q)\, e^{iqz-i\omega t}\, dq\, d\omega, \tag{2}$$

$$j(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j_\omega(x, q)\, e^{iqz-i\omega t}\, dq\, d\omega.$$

Подставим в (2) $y=0$ и введем обозначения

$$\overline{A}^\pm(k) = \int_0^\infty \overline{A}_\omega(\pm x, q)\, e^{\pm ikx} dx \quad \text{и} \quad j(k) = \int_0^\infty j_\omega(x, q)\, e^{ikx} dx \tag{2'}$$

(черта над A обозначает, что рассматриваются значения потенциалов на поверхности $y=0$), тогда уравнение (2) переходит в функциональное уравнение типа уравнения Винера-Хопфа

$$\overline{A}^+(k) + \overline{A}^-(k) = h(k)\cdot j(k), \tag{3}$$

где

$$h(k) = \frac{2\pi i}{\sqrt{p^2-k^2}}.$$

Функции со знаком „+" и „—" соответственно голоморфны в верхней и в нижней полуплоскости комплексного переменного „k", $j(k)$ аналитична в верхней полуплоскости „k". Для определенности предположим что $\operatorname{Jm} p = -\sigma < 0$, тогда факторизация функции $h(k)$ даст

$$h(k) = \frac{h^+(k)}{h^-(k)}, \quad \text{где } h^+(k) = \frac{2\pi i}{\sqrt{p-k}}, \quad h^-(k) = \sqrt{p+k}. \tag{4}$$

$h^+(k)$—голоморфна в области $\operatorname{Jm} k > -\sigma$, а $h^-(k)$ — $\operatorname{Jm} k < \sigma$. Для дальнейшего решения уравнения (3) представим $\overline{A}^+(k)\, h^-(k)$ в виде

$$\overline{A}^+(k)\, h^-(k) = \lambda^-(k) - \lambda^+(k),$$

$$\lambda^\pm(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty\mp i\delta}^{\infty\mp i\delta} \overline{A}^+(k')\, h^-(k')\, \frac{dk'}{k'-k}, \quad 0<\delta<\sigma. \tag{5}$$

где $\lambda^{+}(k)$ и $\lambda^{-}(k)$ соответственно голоморфны в верхней и в нижней полуплоскости „к". Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\lambda^{-}(k)+\overline{A}^{-}(k)\,h^{-}(k)=\lambda^{+}(k)+h^{+}(k)\,j(k). \tag{6}$$

Если ввести функцию $P(k)$, равную правой части уравнения (6) в верхней полуплоскости и левой части—в нижней полуплоскости, то $P(k)$ будет голоморфна на всей плоскости комплексного переменного „k". Это можно сделать, так как функции правой и левой части (6) имеют общую полосу голоморфности $|\operatorname{Jm} k|<\varepsilon$. Можно показать, что при $k\to\infty$, $P(k)\to 0$, следовательно, из теоремы Лиувилля вытекает, что $P(k)\equiv 0$. Тогда из уравнения (6) имеем

$$j(k)=-\frac{\lambda^{+}(k)}{h^{+}(k)}. \tag{7}$$

3. Для нахождения наведенных на экране токов и зарядов из уравнения (7) мы должны найти $\lambda^{+}(k)$, которая определяется из формулы (5). Чтобы найти $\lambda^{+}(k)$, мы должны знать $\overline{A}^{+}(k)$. Функции $\overline{A}^{+}(k)$ суть Фурье-компоненты потенциалов полей излучения на поверхности экрана. Таким образом, нам нужно найти значения потенциалов полей излучения на поверхности экрана. На экране тангенциальная составляющая полного электрического поля обращается в нуль. Учитывая, что $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ и используя условие Лоренца, запишем граничное условие для скалярного потенциала в виде [1]

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2}+p^2\overline{\varphi}=-\frac{\partial^2\overline{\varphi}^0}{\partial x^2}+q^2\overline{\varphi}^0+i\,\frac{\omega}{c}\cdot\frac{\partial\overline{A}_z^0}{\partial z}. \tag{8}$$

При выводе (8) следует учесть, что $A_x^0\equiv 0$, $A_y\equiv 0$. Потенциалы „нулевых" полей имеют вид

$$A^0=\frac{e}{\alpha v_y}\exp\{-\alpha(x+a)\}\times[0,\ \beta\cos\vartheta,\ \beta\sin\vartheta,\ 1], \tag{9}$$

где $\alpha=\sqrt{q^2+\frac{1}{v_y^2}(\omega-qv_z)^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$, v_y и v_z соответственно y и z—компоненты скорости частицы $\vec{v}$.

Решая уравнение (8) с учетом (9), мы найдем значения для потенциалов на поверхности экрана

$$\overline{\varphi}=C_1e^{ipx}+C_2e^{-ipx}-\frac{e}{\alpha v_y}\left(1-\frac{\beta^2\sin^2\vartheta}{1-\frac{qv}{\omega}\cos\vartheta}\right)e^{-\alpha(x+a)},$$

$$\overline{A}_z=\frac{p}{\frac{\omega}{c}}C_1e^{ipx}-\frac{p}{\frac{\omega}{c}}C_2e^{-ipx}-\frac{e\beta^2}{i\frac{\omega}{c}v_y}\,\frac{\sin^2\vartheta}{1-\frac{qv}{\omega}\cos\vartheta}\,e^{-\alpha(x+a)}, \tag{10}$$

где C_1 и C_2—постоянные интегрирования. Подставляя (10) в (2), мы определим $\varphi^+(k)$ и $A_x^+(k)$, следовательно, из (5) и (7) найдем выражения для $j_x(k)$ и $\rho(k)$. Надо учесть, что $C_1=0$, а C_2 определяется из условий $j_x(x=0)=0$. Окончательно получим

$$j_x(k) = B_{q\omega}\frac{p+i\alpha}{\sqrt{p-k}\,(k+i\alpha)},$$

$$\rho(k) = -B_{q\omega}\left\{\frac{\frac{\omega}{c}}{p\sqrt{p-k}} - \frac{i\frac{\omega}{c}}{\alpha}\left(\frac{1-\frac{qv}{\omega}\cos\theta}{\beta^2\sin^2\theta}-1\right)\frac{\sqrt{p-k}}{k+i\alpha}\right\}, \tag{11}$$

где

$$B_{q\omega} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{e\beta^2}{i\frac{\omega}{c}v_y}\frac{\sin^2\theta\sqrt{p-i\alpha}}{1-\frac{qv}{\omega}\cos\theta}e^{-s\alpha}.$$

4. Вычислим полную энергию излучения в рассматриваемой задаче

$$W = \frac{R^2}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int d\Omega\,[\vec{E}_\omega(\vec{R})\,\vec{H}_\omega(\vec{R})]_R. \tag{12}$$

Интегрирование R—составляющей вектора Пойнтинга проводится в (12) по сфере большого радиуса.

Поля в волновой зоне можно найти при помощи формулы [1]

$$A(\vec{R}) = \frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}\int dr'\,e^{-i\omega\frac{\vec{R}\vec{r}'}{R}}j(r') = \frac{2\pi}{R}e^{i\frac{\omega}{c}R}j(q_0k_0), \tag{13}$$

где

$$k_0 = \frac{\omega}{c}\sin\psi\cos\varphi, \qquad q_0 = \frac{\omega}{c}\cos\psi.$$

Здесь пользуемся сферической координатной системой

$$x = R\sin\psi\cos\varphi,\quad y = R\sin\psi\sin\varphi,\quad z = R\cos\psi.$$

Вычисляя из формулы (13) $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и подставляя в (12), мы получим [1]

$$I_0(\psi,\varphi) = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega^2 d\omega\sin\psi\left\{|j_x(k_0q_0)|^2\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+|j_x(k_0q_0)\cos\varphi-\rho(k_0q_0)\sin\psi|^2\frac{1}{\cos^2\psi}\right\}. \tag{14}$$

Подставляя из (11) выражение для $j_x(k_0q_0)$ и $\rho(k_0q_0)$ и интегрируя по частотам, мы получим угловое распределение излучения

$$I_\vartheta(\psi, \varphi) = \frac{e^2\beta^2 \sin^2\vartheta}{4\pi^2 a (1 - \beta\cos\vartheta\cos\psi)} \times$$

$$\times \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}(\cos\psi - \beta\cos\vartheta)^2 + \alpha_0^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}(1 - \beta\cos\vartheta\cos\psi)}{\alpha_0^3 |\beta_1 \sin\psi\cos\varphi - i\alpha_0|^2}, \qquad (15)$$

где

$$\alpha_0^2 = \frac{(1 - \beta\cos\vartheta\cos\psi)^2 - \beta^2\sin^2\vartheta\sin^2\psi}{1 - \beta\cos\vartheta\cos\psi}; \quad \beta_1^2 = \frac{\beta^2\sin^2\vartheta}{1 - \beta\cos\vartheta\cos\psi}.$$

Легко заметить, что когда угол наклона траектории частицы равняется $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, то формула (15) переходит в формулу

$$I_\vartheta(\psi, \varphi) = \frac{e^2\beta^2}{4\pi^2 a} \frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\psi + \alpha_0^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\alpha_0^3 |\beta\sin\psi\cos\varphi - i\alpha_0|^2}, \qquad (15')$$

где $\alpha_0 = \sqrt{1 - \beta^2\sin^2\psi}$, которая совпадает с формулой излучения, полученной в работе [1], если там тоже подставить $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. При малых скоростях $\beta \to 0$, формула (15) принимает вид

$$I_\vartheta^*(\psi, \varphi) = \frac{e^2\beta^2}{4\pi^2 a} \sin^2\vartheta \left\{\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\psi + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right\}. \qquad (16)$$

Отсюда следует, что вид функции распределения излучения по углам не зависит от угла падения $I \sim \cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\psi + \sin^2\frac{\varphi}{2}$ и совпадает с результатом работы [1]. Полное излучение можно найти, интегрируя (16) по углам ψ и φ

$$W = \frac{3e^2\beta^2}{8a}\sin^2\vartheta.$$

Полное излучение, при $\beta \to 0$, пропорционально энергии частицы $\sim\beta^2$ и стремится к нулю при $\vartheta \to 0$, как $\sin^2\vartheta$.

Для дальнейшего исследования (15) проведем интегрирование по углу φ и рассмотрим распределение излучения в зависимости от угла ψ

$$I_\vartheta(\psi) = \frac{e^2\beta^2}{4\pi a}\sin^2\vartheta \frac{2(\cos\psi - \beta\cos\vartheta)^2 + \gamma^2\sin^2\psi}{[(\cos\psi - \beta\cos\vartheta)^2 + \gamma^2\sin^2\psi]^2}. \qquad (17)$$

При ультрарелятивистских скоростях $\beta \to 1$, $\gamma \to 0$ выражение (17) имеет максимум при углах $\psi \simeq \pm\vartheta$, причем при углах $\vartheta > \sqrt{1 - \beta^2}$ высота максимума равняется $\frac{1}{\gamma^2\sin^2\vartheta}$, а ширина порядка $\Delta\psi \sim \sqrt{1 - \beta^2}$, следовательно, при больших скоростях можно интеграл по углам ψ оценить, как произведение высоты максимума углового распределения на его ширину, тогда имеем

$$W \sim \frac{e^2\beta^2 \sin^2\vartheta}{a} \frac{1}{\gamma^2 \sin^2\vartheta} \gamma = \frac{e^2\beta^2}{a\gamma}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что при углах наклона траектории частицы $\vartheta > \sqrt{1-\beta^2}$ полное излучение частицы, при $\beta \to 1$, не зависит от угла падения и пропорционально энергии частицы. При ультрарелятивистских скоростях можно применять приближение геометрической оптики, тогда излучается та часть энергии поля частицы, которая попадает на экран, а из геометрии нашей задачи видно, что эта часть поля не зависит от углов падения частицы и пропорциональна энергии частицы. Эти рассуждения полностью согласуются с формулой (18). При углах $\vartheta < \sqrt{1-\beta^2}$, при $\beta \to 1$, высота максимума углового распределения по ψ порядка $\frac{1}{\gamma^2}$, следовательно, полное излучение будет

$$W \sim \frac{e^2\beta^2}{a} \sin^2\vartheta \frac{1}{\gamma^2} \gamma = \frac{e^2\beta^2}{a\gamma} \sin^2\vartheta. \tag{19}$$

Как видно из (19), полное излучение, при $\beta \to 1$, пропорционально энергии частицы и стремится к нулю при $\vartheta \to 0$, как $\sin^2\vartheta$.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Б. М. Болотовского за ценные советы и обсуждение полученных результатов.

ФИАН СССР
им. П. Н. Лебедева

Поступила 25 XII 1963

Դ. Մ. Սեդրակյան

ԿԵՏԱՅԻՆ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը, երբ նա անցնում է իդեալական հաղորդիչ մետաղյա կիսահարթության մոտով՝ կազմելով նրա եզրի հետ կամայական անկյուն 0-ից π-ի սահմաններում:

Խնդիրը լուծված է ճշգրիտ, Վիներ-Խոպֆի մեթոդով: Ստացված են էկրանի ինդուցված հոսանքների և լիցքերի Ֆուրյե-կոմպոնենտների արտահայտությունները: Այնուհետև հաշված է ճառագայթման ինտենսիվության անկյունային բաշխումը և նրա կախումը մասնիկի հետագծի ու էկրանի եզրի միջև եղած ϑ *անկյունից: Հաշված է նաև լրիվ ճառագայթումը և ցույց է տրված, որ, ինչպես փոքր, այնպես էլ մեծ արագությունների դեպքում մասնիկի էներգիայի կորուստները լրիվ ճառագայթման վրա համեմատական են մասնիկի էներգիային և ձգտում են 0-ի, երբ* $\vartheta \to 0$, *ինչպես* $\sin^2\vartheta$:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казанцев А. П., Сурдутович Г. И.* Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана. ДАН, **74**, 1962.
2. *Седракян Д. М.* Излучение заряженной частицы, пересекающей металлический экран. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, **17**, № 1, 1964.
3. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. ИЛ, М., 1962.