ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 4, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Исследование распределения давления на ударной волне

Рассмотрим осесимметричную задачу проникания давления в сжимаемую жидкость. Давление за фронтом на поверхности считаем постоянным P_1, скорость фронта сверхзвуковая $V > a$. Уравнение политропы возьмем в виде $P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$, где ρ—плотность жидкости. Выберем оси Or_0 по поверхности жидкости, ось Oz в глубь жидкости, O—точка возникновения давления на поверхности.

Рассмотрим решение вблизи особой точки $r_0 = \frac{at}{M}$, где t-время, a—скорость звука невозмущенной жидкости, $M = \frac{V}{a}$. Для давления вблизи границы области влияния начальной точки O (линия BB', фиг. 1) имеем [3]

$$P = \frac{1}{2\pi} P_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\frac{at}{M} - r_0 \cos\psi - \sqrt{f_1(\psi)}}{\sqrt{r_0^2 + z^2\left(\frac{1}{M} - 1\right)}\sqrt{f_1(\psi)}}\, d\psi,$$

где $$\tag{1}$$

$$f_1(\psi) = \left(\frac{at}{M} - r_0\cos\psi\right)^2 - (a^2t^2 - r_0^2 - z^2)\left(\frac{1}{M^2} - 1\right).$$

Введем полярные координаты $r_0 = r_1 \cos\theta$, $z = r_1 \sin\theta$.

Рассмотрим линейное решение (1) на уточненных характеристиках [2], заменяя $t - \frac{r_1}{a}$ через y, причем будем считать величину $r_1\varepsilon = r_0 - \frac{at}{M}$ малой.

Тогда имеем для давления, отбрасывая малые высшего порядка,

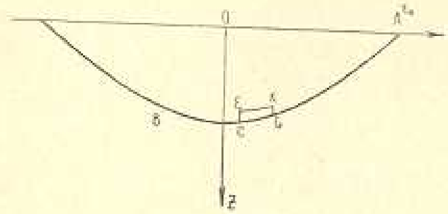
$$P = \frac{1}{2\pi} P_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{2ayr_1\left(\frac{1}{M^2} - 1\right)}{2r_1 \sin^2\frac{\psi}{2} + r_1\varepsilon\cos\psi + \sqrt{f_2(\psi)}} \times$$

$$\times \frac{\sin\theta}{\frac{1}{M^2}-1} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{f_2(\psi)}}, \tag{2}$$

где

$$f_2(\psi) = \left(2r_1 \sin^2\frac{\psi}{2} + r_1\varepsilon\cos\psi\right)^2 - 2r_1 ay\left(\frac{1}{M^2}-1\right).$$

Для $0 < \varepsilon < \sqrt{y}$ имеем $P \sim P_1 y^{\frac{1}{4}}$. Если уравнение характеристик подставить в соотношение на ударном фронте, можно найти, что $y \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}$ и $\left(\frac{P}{Bn}\right) \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}$, то есть давление будет малой порядка $\frac{4}{3}$. При дальнейшем продвижении от точки B фиг. 1 к оси Oz по линии BB' имеем $\varepsilon = y^{\alpha}$ $\alpha < \frac{1}{2}$, $P \sim P_1 y\varepsilon^{-\frac{3}{2}} = P_1 y^{1-\frac{3}{2}\alpha}$. Из соотношений на ударном фронте найдем, что $y \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{2}{3\alpha}}$ и $\frac{P}{Bn} \sim$ $\sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\alpha}}$, то есть давление будет быстро падать к нулю при малых α, а затем перейдет в экспоненциальное затухание при $\varepsilon = O(1)$, что было показано нами ранее.



Фиг. 1.

Для $\varepsilon \gg \sqrt{y}$ можно получить давление на ударной волне вблизи точек B и B'

$$P = \frac{1}{4} P_1 \sin\theta \frac{1}{1-\frac{1}{M^2}} \frac{ay}{r_1} \varepsilon^{-\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, нами найдено решение на ударной волне в окрестности точки $r_0 = \frac{at}{M}$.

Приведенное решение дает возможность оценить порядки величин, однако, оно неточно, поскольку при его нахождении мы пользовались одномерными характеристиками, тогда как теперь имеем вдоль характеристик из (2)

$$\frac{P}{Bn} \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad V_{r_1} \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad V_{\psi} \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{2},$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} - a \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad \frac{\partial r_1}{r_1 \partial \theta} \sim \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Здесь V_{r_1}, V_θ—радиальная и трансверсальная составляющие скорости.

Из (3) следует, что квадрат величины $\frac{\partial r_1}{r_1 \partial \theta}$ в уравнении характеристик

$$\frac{\frac{\partial r_1}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r_1}{r_1 \partial \theta}\right)^2}} = a\left(1 + \frac{n+1}{2}\frac{P}{Bn}\right) \tag{4}$$

нужно удержать.

Таким образом, в области $BCEK$ (фиг. 1) мы имеем короткую волну [1].

Введем переменные

$$V_{r_1} = a_0 M_0 \mu, \quad V_\theta = a_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} V_0 \nu, \quad \frac{P}{Bn} = M_0 \alpha,$$

$$r_1 = a_0 t\left(1 + \frac{n+1}{2}\delta_0 \delta\right), \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\,\vartheta_0 Y, \tag{5}$$

где

$$\cos\theta_0 = \frac{a_0}{V}, \quad a = a_0.$$

В нашем случае $M_0 = \delta_0 = \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}$, $V_0 = \delta_0^{\frac{3}{2}} \nu$, $\vartheta = \delta_0^{\frac{1}{2}}$. Из уравнений газовой динамики получится [1]

$$\frac{\partial \nu}{\partial \delta} = \frac{\partial \mu}{\partial Y},$$

$$(\mu - \delta)\frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial Y} + \mu = 0, \tag{6}$$

$$\alpha = \mu.$$

Уравнение фронта ударной волны имеет вид

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial Y}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu. \tag{7}$$

Решение (6) ищем в виде [1]

$$\delta = -\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\mu}(Y - Y_1)^2 + F(\mu),$$

$$\nu = \varphi(\mu)(Y - Y_1) + \nu_0. \tag{8}$$

Тогда первое соотношение (7) удовлетворяется, а из второго найде

$$2\mu\varphi'' + \varphi\varphi'' - 2\varphi' - 2\varphi'^2 = 0, \qquad (9$$

$$\left(\mu + \frac{1}{2}\varphi\right)F' - F + \mu = 0. \qquad (10$$

Решение уравнений (9) и (10) запишется [1]

$$\varphi = \frac{A^2 - B^2 - \mu^2}{A + \mu},$$

$$F = \mu - \frac{1}{2B}\left[(\mu + A)^2 - B^2\right]\ln\frac{\mu + A - B}{\mu + A + B} + C\left[(\mu + A)^2 - B^2\right]. \qquad (11$$

Для определения постоянных используем условие, выражающе еся в том, что $k_1 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial Y}\right)$ конечно при $\delta_1 = \mu_1$. Из (8) имеем

$$A = -\mu_1,\ C = -\frac{1}{2}\frac{1}{k_1^2},\ -\sqrt{\mu_1} = B^2\frac{1}{2k_1^3}\frac{\partial^2\mu_1}{\partial Y_1^2},\ \gamma_0 = \mu_1^{3/2} - \frac{B^2}{k_1}.$$

Для определения постоянных A, B, C имеем условие непрерывност касательной составляющей скорости на ударной волне и условие смы кания потока, при подходе из гиперболической области, в точке фиг. 1 ударной волны.

Решение в области гиперболичности уравнений в переменны $\xi = \frac{r_0}{t}$, $\eta = \frac{z}{t}$ вдоль ударной волны AB фиг. 1 запишется [4]

$$P = P_1\sqrt{\frac{\xi - a\sin\alpha_1}{\xi}}\sqrt{\frac{V}{V - a\sin\alpha_1}}, \qquad (12$$

причем уравнение ударной волны

$$\eta = \frac{V - \xi}{\sqrt{\frac{V^2}{a^2} - 1}} + \frac{1}{2Bn}P_1\sqrt{\xi - a\sin\alpha_1}\sqrt{\frac{V}{V - a\sin\alpha_1}}\frac{n+1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}, \qquad (13$$

где $\sin\alpha_1 = \frac{a}{V}$, и в уравнении оставлены члены основного порядк малости по $\xi - a\sin\alpha_1$.

Из соотношений (5) найдем вдоль ударного фронта

$$r_1 = at\left(1 + \frac{n+1}{2}\delta_0\delta\right), \qquad (14$$

где $\delta(Y)$ есть уравнение ударного фронта, причем из уравнений (5 имеем $\frac{P}{Bn} = \left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}\mu$, где μ определяется из (11).

С помощью (13) и (14) находим уравнение для $\sqrt{\xi - a\sin\alpha_1}$ вблизи точки B фиг. 1

$$\frac{\left(\xi\frac{V}{a}-a\right)^2}{\frac{V^2}{a^2}-1}+2a\cos\alpha_1\frac{1}{2Bn}P_1\sqrt{\xi-a\sin\alpha_1}\,\frac{h+1}{\sin\alpha_1\cos^2\alpha_1}\sqrt{\xi}=$$

$$=2a^2\frac{n+1}{2}\left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}\delta. \tag{15}$$

Можно решать и это уравнение, однако, первый член в левой части значительно меньше второго. Теперь имеем

$$\sqrt{\xi-a\sin\alpha_1}=\frac{\left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{1}{3}}\delta}{\frac{1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}\sqrt{\frac{a\sin\alpha_1}{a^2}}} \tag{16}$$

и для давления из (12)

$$\frac{P}{Bn}=\left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{3}}\mu. \tag{17}$$

Покажем теперь, что первый член в (15) значительно меньше второго. В самом деле, имеем для их отношения $\frac{\delta^2\cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_1}{n+1}\ll 1$, поскольку в точке B из (17) $\delta<1$. Теперь легко найти условие в точке B фиг. 1 из равенства давлений

$$\delta=\mu+\frac{1}{2}Y_B^2. \tag{18}$$

Условие для касательной составляющей заменим уравнением импульсов [1]. Если взять область $BCEK$ фиг. 1 и написать уравнение импульсов в направлении, перпендикулярном KB, получим

$$-\int_{\theta_c}^{\theta_B}\rho\left[V_\theta\cos(\theta-\theta_0)+V_{r_1}\sin(\theta-\theta_0)\right]d\theta\, atadt=$$

$$=\int_{\delta_k}^{\delta_B}Patdt\,\delta_0\,d\delta-P_B(\delta_c-\delta_B)\frac{atdt}{2}\delta_0, \tag{19}$$

где ρ — начальная плотность жидкости, или

$$-\int_{Y_c}^{Y_B}\frac{n+1}{2}(\nu+\mu Y)\,dY=\int_0^{\delta_B}\mu\,d\delta-\frac{1}{2}\mu_B(\delta_c-\delta_B), \tag{20}$$

где Y_B находится из (16), поскольку

$$\xi - a\sin\alpha_1 = -a\cos\alpha_1\sqrt{\frac{n+1}{2}\left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{2}{3}}}\,Y_B$$

или

$$-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\,Y_B = \delta_B^2\sin\alpha_1\cos\alpha_1.$$

Ход вычислений следующий: задаваясь Y_B, находим δ_B, а затем с помощью (18)—ν_B. Подставляя полученные значения в решение (18), найдем связь постоянных C и A. Подставляя все эти величины в (20), найдем уравнение для определения A. Из уравнения (6) находим линию ударного фронта $\delta(Y)$ при граничном условии $\delta(Y_B)=\delta_B$. Проверкой правильности выбора Y_B будет малость $\delta\to 0$ при $Y=Y_c$. Сама граница C, отделяющая область короткой волны от области плавного изменения по θ, остается, в известном смысле, произвольной. Таким образом, давление на ударной волне ABC определяется с нужной точностью.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 XII 1963

Ա. Գ. Բագդոև

ՃՆՇՄԱՆ ԲԱՇԽՄԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՎՐԱ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է ճնշման տարածումը սեղմելի հեղուկում: Ճշտվում է գծային լուծումը էլիպտիկ և հիպերբոլիկ շրջանների համար կետի մոտ հարվածային ալիքի վրա:

Ճնշումը գտնվում է որպես 4/3 կարգի փոքր մեծություն:

Քանի որ հեղուկի շարժումը ոչ միաչափ է, ապա լուծումը գտնվում է երկչափ տեսությամբ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А.* Теория коротких волн. ПМТФ, № 1, 1960.
2. *Whitam G. B.* The propagation of weak spherical shocs in star. Communications on Pure and Applied Mathematics, **6**, 1953.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
4. *Багдоев А. Г.* и *Нерсисян Э. М.* Осесимметричная изэнтропическая задача проникания давления в идеальную сжимаемую жидкость. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1962.