

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Задоян

О пространственном напряженном состоянии
 пластического слоя, сжатого между шероховатыми
 плитами

В работах Д. Д. Излева [1—3] дан ряд обобщений решения задачи Л. Прандтля [4] о сжатии пластического слоя между шероховатыми плитами.

Ниже приведено другое частное решение пространственной задачи теории идеальной пластичности, также обобщающее решение указанной задачи Прандтля.

Общие уравнения теории идеальной пластичности при условии несжимаемости и при критерии пластичности Губера-Мизеса имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) = 6k^2;$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \quad (3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y);$$

$$2\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 6\lambda\tau_{xy},$$

$$2\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 6\lambda\tau_{xz}, \quad (4)$$

$$2\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 6\lambda\tau_{yz}.$$

Из (3) следует условие незжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \quad (5)$$

Ищем точное решение системы уравнений (1)–(5), полагая

$$\tau_{xz} = az, \quad \tau_{yz} = bz. \quad (6)$$

$$w = -2xz, \quad (7)$$

где a , b и α — постоянные.

Из соотношений (3)–(4) и (6)–(7) следует

$$u = \int F(z) dz + H(x, y). \quad (8)$$

$$v = \frac{b}{a} \int F(z) dz + Q(x, y), \quad (9)$$

где F , H и Q — произвольные функции своих аргументов.

Для компонентов напряжений будем иметь

$$\sigma_x = \sigma_z + \left(2\alpha + \frac{\partial H}{\partial x}\right) \frac{2az}{F(z)},$$

$$\sigma_y = \sigma_z + \left(2\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \frac{2az}{F(z)}, \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{az}{F(z)}.$$

Подставляя компоненты напряжений (6) и (10) в уравнения равновесия (1), приходим к уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + a = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} + b = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad (11)$$

$$2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0.$$

Из (11) находим

$$\sigma_z = -ax - by - c, \quad c = \text{const.} \quad (13)$$

Условие несжимаемости (5) дает

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x. \quad (14)$$

Тогда из (12) следует

$$\nabla^2 H = 0, \quad \nabla^2 Q = 0, \quad (15)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Внося выражения (6) и (10) в условие текучести (2) и вводя обозначения

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\left(2\alpha + \frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(2\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2}, \quad (16)$$

получим

$$\frac{2aS(x, y)z}{F(z)} = \sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}. \quad (17)$$

Полагая

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha + \omega, \quad \omega = \text{const}, \quad (18)$$

находим

$$\begin{aligned} H &= (\alpha + \omega)x + \varphi(y), \\ Q &= (\alpha - \omega)y + \psi(x), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции своих аргументов.

Из уравнения (15) будем иметь $\varphi''(y) = \psi''(x) = 0$, откуда

$$\varphi(y) = \beta y + \beta_0, \quad \psi(x) = \gamma x + \gamma_0, \quad (20)$$

где $\beta, \beta_0, \gamma, \gamma_0$ — произвольные постоянные.

Внося в (17) выражения

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (\alpha + \omega)x + \beta y + \beta_0, \\ Q(x, y) &= (\alpha - \omega)y + \gamma x + \gamma_0, \end{aligned} \quad (21)$$

получим

$$S = \sqrt{\omega^2 + 3\alpha^2 + \frac{1}{4}(\beta + \gamma)^2}. \quad (22)$$

Можно показать, что для того, чтобы $S = \text{const}$, условие $\frac{\partial H}{\partial x} = \text{const}$ не только достаточно, но и необходимо.

Из (17) имеем

$$F(z) = \frac{2Saz}{\sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}}. \quad (23)$$

Подставляя значения σ_z, H, Q и F в (10), для компонентов напряжений окончательно получим

$$\sigma_x = -ax - by - c + \frac{3\alpha + \omega}{S} \sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2},$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -ax - by - c + \frac{3a - \omega}{S} \sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}, \\ \sigma_z &= -ax - by - c, \\ \tau_{xy} &= \frac{\beta + \gamma}{2S} \sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}, \\ \tau_{xz} &= az, \quad \tau_{yz} = bz.\end{aligned}\quad (24)$$

Внося H , Q и F в (8)–(9) и производя интегрирование, для компонент скорости находим

$$\begin{aligned}u &= (\alpha + \omega)x + \beta y + \beta_0 - \frac{2Sa}{a^2 + b^2} \sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}, \\ v &= \gamma x + (\alpha - \omega)y + \gamma_0 - \frac{2Sb}{a^2 + b^2} \sqrt{k^2 - (a^2 + b^2)z^2}, \\ w &= -2\alpha z.\end{aligned}\quad (25)$$

Полученное решение содержит девять произвольных постоянных. Придавая некоторым из этих постоянных определенные значения, можно получить решения некоторых частных задач.

Пример 1. Принимая $b = \beta = \beta_0 = \gamma = \gamma_0 = 0$, $\omega = \alpha$, получим случай плоской деформации, исследованный Прандтлем [5]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -ax - c + 2\sqrt{k^2 - a^2z^2}, \\ \sigma_z &= -ax - c, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2},\end{aligned}\quad (26)$$

$$\tau_{xz} = az, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0;$$

$$\begin{aligned}u &= 2\alpha x + \beta_0 - 2\frac{\alpha}{a} \sqrt{k^2 - a^2z^2}, \\ w &= -2\alpha z, \quad v = 0.\end{aligned}\quad (27)$$

Пример 2. Рассмотрим тонкий пространственный, прямоугольный в плане [5], слой между двумя параллельными шероховатыми жесткими плитами, которые приближаются друг к другу с заданной скоростью w_0 (фиг. 1). Принимаем, что касательные напряжения, действующие на этих контактных поверхностях, известны и равны mk и nk . Здесь m и n — степени шероховатости [6–7] контактных поверхностей плит соответственно по направлению x и y , причем $m^2 + n^2 \leq 1$. Знак равенства соответствует случаю идеальной шероховатости. В силу принятых предположений

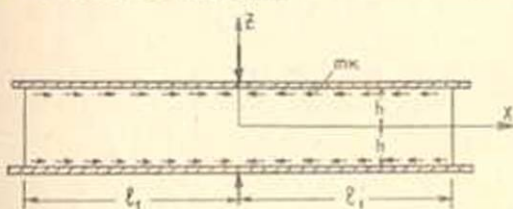
$$a = -\frac{mk}{h}, \quad b = -\frac{nk}{h}, \quad \alpha = \frac{w_0}{2h}.\quad (28)$$

Ввиду симметрии, достаточно рассматривать объем слоя: $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $0 \leq z \leq h$.

Задавая приближенные граничные условия на свободных торцах пластической массы

$$\int_0^{l_1} \int_0^h \sigma_x(l_1, y, z) dy dz = 0, \quad \int_0^{l_1} \int_0^h \sigma_y(x_1, l_1, z) dx dz = 0 \quad (29)$$

и подставляя σ_x и σ_y из (24) в (29), для произвольных постоянных c и m получим следующие значения:



Фиг. 1.

$$c = \frac{3k}{4} \left(m \frac{l_1}{h} + n \frac{l_2}{h} \right) + \frac{3}{2} \frac{k_2 M}{S}, \quad m = -\frac{S}{2M} \left(m \frac{l_1}{h} - n \frac{l_2}{h} \right), \quad (30)$$

где

$$M = \sqrt{1 - m^2 - n^2} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \arcsin \sqrt{m^2 + n^2}, \quad (31)$$

$$S = \frac{\sqrt{3} \alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{ml_1 - nl_2}{2Mh} \right)^2}}, \quad \left| \frac{ml_1 - nl_2}{2Mh} \right| < 1. \quad (32)$$

Далее, для определения остальных неизвестных постоянных $\bar{p}$, $\bar{p}_0$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}_0$ напомним условие сохранения количества материала

$$\omega_0 xy = \int_0^y \int_0^h u(x, y, z) dy dz + \int_0^x \int_0^h v(x, y, z) dx dz. \quad (33)$$

Подставляя сюда компоненты скорости перемещения, находим, что $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0 = 0$,

$$\bar{p}_0 = -\frac{mMS}{m^2 + n^2}, \quad \bar{\gamma}_0 = -\frac{nMS}{m^2 + n^2}. \quad (34)$$

Определенный практический интерес представляет величина предельного давления

$$P^* = -4 \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sigma_z(x, y) dx dy, \quad (35)$$

при котором происходит течение пластической массы.

Из (24) и (35) следует, что

$$P^* = kl_1 l_2 \left(\frac{ml_1 + nl_2}{2h} + \frac{6\alpha M}{S} \right). \quad (36)$$

В случае $m = n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ получим

$$M = \frac{\pi}{2}, \quad S = \frac{\sqrt{3} \pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{l_1}{h} - \frac{l_2}{h} \right)^2}}, \quad (37)$$

$$P^* = kl_1 l_2 \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{l_1}{h} + \frac{l_2}{h} \right) + \sqrt{3} \pi \sqrt{1 - \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{l_1}{h} - \frac{l_2}{h} \right)^2} \right].$$

Для квадратных плит получим простую формулу

$$P^* = kl^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l}{h} + \sqrt{3} \pi \right). \quad (38)$$

Экспериментально можно определить величину отклонения найденного значения P^* от истинного.

Пример 3. Пусть прямоугольный параллелепипед сжимается между двумя идеально гладкими жесткими плитами, а на боковых поверхностях действуют нормальные давления p_1 и p_2 (фиг. 2). Принимая $\alpha = \beta = \gamma = 0$, из (24) получим

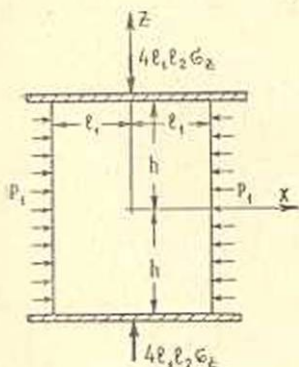
$$\begin{aligned} \sigma_x &= -c + \frac{3x + \omega}{S} k, & \tau_{xy} &= 0, \\ \sigma_y &= -c + \frac{3x - \omega}{S} k, & \tau_{xz} &= 0, \\ \sigma_z &= -c, & \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Вместо (25) будем иметь

$$\begin{aligned} u &= (\alpha + \omega) x + \beta_0, \\ v &= (\alpha - \omega) y + \gamma_0, & w &= -2\alpha z. \end{aligned} \quad (40)$$

Удовлетворяя граничным условиям и учитывая симметрию задачи, находим

$$\begin{aligned} c &= \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{3x}{S} k, & \beta_0 &= \gamma_0 = 0, \\ \omega &= -\frac{p_1 - p_2}{2k} S, & \alpha &= \frac{\omega_0}{2h}, \\ S &= \frac{\sqrt{3} \pi}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{2k} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (41)$$



Фиг. 2.

Подставляя найденные выражения произвольных постоянных в (39) и (40), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p_1, & \sigma_y &= -p_2, \\ \sigma_z &= -\frac{p_1 + p_2}{2} - \sqrt{3} k \sqrt{1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{2k} \right)^2}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \end{aligned} \quad (42)$$

$$u = \frac{w_0}{2h} \left[1 - \frac{\sqrt{3} (p_1 - p_2)}{\sqrt{4k^2 - (p_1 - p_2)^2}} \right] x,$$

$$v = \frac{w_0}{2h} \left[1 + \frac{\sqrt{3} (p_1 - p_2)}{\sqrt{4k^2 - (p_1 - p_2)^2}} \right] y;$$

$$w = -w_0 \frac{z}{h}.$$

Согласно полученным формулам, компоненты напряжений и скорости не зависят от поперечных размеров параллелепипеда.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 9 XII 1963

Մ. Յ. Զաղոյան

ԿՈՇՏ ՍԱԼԵՐԻ ԱՐԱՆՔՈՒՄ ՍԵՂՄՎՈՂ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է ուղղանկյունաձև շերտի լարվածային վիճակը, երբ այն սեղմվում է երկու դողանկո իրար մոտեցող անհարթ սալերով: Շոշափող լարումները սալերի վրա բնդունվում է տրված: Ցալով նաև տեղափոխումների վերաբերյալ բաղադրիչը, պլաստիկության տեսության հավասարումներից որոշվում է լարումների և տեղափոխումների միևս բաղադրիչները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нелев Д. Д. Об одном классе решений общих уравнений теории идеальной пластичности. Известия АН СССР, ОТН, № 11, 1958.
2. Нелев Д. Д. Некоторые частные решения уравнений осесимметричной задачи теории идеальной пластичности и обобщение решения Прандтля о сжатии пластического слоя двумя шероховатыми плитами. ПММ, 22, в. 5, 1958.
3. Нелев Д. Д. Об одном частном решении общих уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. ДАН СССР, 123, № 6, 1958.
4. Prandtl L. Zelts. Ang. Math. Mech., 3, 1923. (Теория пластичности. Сб. статей под редак. Ю. Н. Работнова, ГИИЛ, 1948).
5. Ильяшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям. ПММ, 18, в. 3, 1954.
6. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехтеориздат, М.—Л., 1950.
7. Хилл Р. Теория пластичности. М.—Л. ИЛ, 1956.