ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 4, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. Еганян

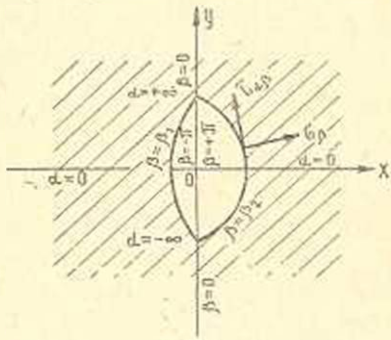
Общее решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости с луночным отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия

Задача рассматривается в биполярных координатах. В этих же координатах Я. С. Уфляндом рассмотрена общая задача о растяжении бесконечной плоскости с луночным отверстием, когда контуры отверстия свободны от внешней нагрузки, т. е. выполняются условия [1]:

$$\sigma_\beta\Big|_{\beta=\beta_i}=\tau_{\alpha\beta}\Big|_{\beta=\beta_i}=0 \qquad (i=1,\ 2).$$

В данной статье рассматривается случай, когда бесконечная плоскость с луночным отверстием свободна от растяжения, а на контуре отверстия выполняются условия (фиг. 1):

$$\sigma_\beta\Big|_{\beta=\beta_i}=\sigma_i(\alpha),\quad \tau_{\alpha\beta}\Big|_{\beta=\beta_i}=\tau_i(\alpha)\quad (i=1,\ 2). \tag{1}$$



Фиг. 1.

Контурные напряжения $\sigma_i(\alpha)$ и $\tau_i(\alpha)$ $(i=1,\ 2)$ должны удовлетворять уравнениям равновесия. Кроме этого полагаем, что $\tau_i(\alpha)$ и производные функции $\sigma_i(\alpha)$ интегрируемы в пределах от $\alpha=-\infty$ до $\alpha=+\infty$.

Сначала будем рассматривать случай, когда нагрузка симметрична относительно оси OX.

Общие формулы напряжений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\sigma_\alpha=\left[g\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\sin\beta}{a}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\operatorname{ch}\alpha}{a}\right](g\Phi),$$

$$\sigma_\beta=\left[g\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\operatorname{sh}\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\sin\beta}{a}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\cos\beta}{a}\right](g\Phi),$$

$$\tau_{\alpha\beta}=-g\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi),\quad \text{где}\quad g=\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}{a}. \tag{2}$$

Функция $g\Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right](g\Phi)=0.$$

Общее решение последнего уравнения, то есть $g\Phi$, при условиях (1) разыскиваем аналогично Я. С. Уфлянду. Если искать функцию $g\Phi$ в обычной форме интеграла Фурье (четность по α очевидна по условию задачи)

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty f(m,\beta)\cos m\alpha\,dm,\quad \text{где}\quad f(m,\beta)=A(m)\operatorname{ch}m\beta\cos\beta+\\&+B(m)\operatorname{ch}m\beta\sin\beta+C(m)\operatorname{sh}m\beta\cos\beta+D(m)\operatorname{sh}m\beta\sin\beta,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

то четыре функции $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ позволяют удовлетворить четырем граничным условиям (1). Однако, при этом функция $g\Phi$ не должна изменять напряженное состояние на бесконечности, то есть должно выполняться условие

$$(g\Phi)\Big|_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}=0.\quad(4)$$

Поэтому к интегралу Фурье (3) добавляется особое решение типа

$$K(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\ln\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}.$$

Постоянная K и позволяет удовлетворить условию (4). Кроме того, для дальнейшего удобно поставить требование

$$\lim_{\alpha\to\infty}(g\Phi)=0.\quad(5)$$

Замечая, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\ln\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}=-2\cos\beta$$

и

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\infty f(m,\beta)\cos m\alpha\,dm=0$$

(это вытекает из требования абсолютной сходимости бесконечных интегралов), положим окончательно

$$g\Phi=g\Phi_0+k\left[2\cos\beta+(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\ln\frac{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta}\right],\quad(6)$$

где

$$g\Phi_0=\int_0^\infty f(m,\beta)\cos m\alpha\,dm.\quad(7)$$

Обратимся к граничным условиям (1), которые с учетом (2) можно записать так:

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi_0)\bigg|_{\beta=\beta_i} = -\frac{a\tau_i(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i} + \frac{K\operatorname{sh}2\alpha\sin2\beta_i}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_i)^2},$$

$$\left[(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta\right](g\Phi_0)\bigg|_{\beta=\beta_i} = a\sigma_i(\alpha). \tag{8}$$
$$(i=1,\ 2).$$

Условие (4), с помощью (3) и (6), имеет вид

$$2K = -\int\limits_0^\infty A(m)\,dm. \tag{9}$$

Уравнение (8) служит для определения функций $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$, а условие (9) — для определения постоянной K.

Левые части первого и второго уравнений (8) представляют некоторый интеграл Фурье. Однако, третье и четвертое уравнения (8) непосредственно не дают интеграла Фурье, так как в них перед знаками интегралов имеются функции от переменной α.

С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянду, дифференцируем третье и четвертое уравнения (8) по α.

С учетом первого и второго уравнений (8) получим

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)(g\Phi_0)\bigg|_{\beta=\beta_i} = \frac{a\sigma_i'(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i} - \frac{a\tau_i(\alpha)\sin\beta_i}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)^2}, \tag{10}$$

интегрируя которое по α будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - 1\right)(g\Phi_0)\bigg|_{\beta=\beta_i} = a\int\limits_\infty^\alpha\left[\frac{\sigma_i'(\gamma)}{\operatorname{ch}\gamma-\cos\beta_i} - \frac{\tau_i(\gamma)\sin\beta_i}{(\operatorname{ch}\gamma-\cos\beta_i)^2}\right]d\gamma \tag{11}$$

(аддитивная постоянная интегрирования в левой части равна нулю в силу условия (5)).

Подставляя значение $g\Phi_0$ из (7) в (8) и (11), получим следующую систему:

$$\int\limits_0^\infty mf'(m,\ \beta_i)\sin m\alpha\,dm = \varphi(\alpha,\ \beta_i),$$
$$(i=1,\ 2) \tag{12}$$
$$\int\limits_0^\infty (m^2+1)f(m,\ \beta_i)\cos m\alpha\,dm = \psi(\alpha,\ \beta_i),$$

где обозначено

$$\varphi(\alpha,\ \beta_i) = \frac{a\tau_i(\alpha)}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i} - \frac{K\operatorname{sh}2\alpha\sin2\beta_i}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_i)^2},$$

$$\psi(\alpha,\ \beta_i) = a\int\limits_\alpha^\infty\left[\frac{\sigma_i'(\gamma)}{\operatorname{ch}\gamma-\cos\beta_i} - \frac{\tau_i(\gamma)\sin\beta_i}{(\operatorname{ch}\gamma-\cos\beta_i)^2}\right]d\gamma. \tag{13}$$

Для того, чтобы из условий (12) определить коэффициенты $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$, нужно правые части разложить в интегралы Фурье

$$\varphi(\alpha, \beta_i) = \int_0^\infty H(m, \beta_i) \sin m\alpha dm,$$

$$(i = 1, 2) \tag{14}$$

$$\psi(\alpha, \beta_i) = \int_0^\infty M(m, \beta_i) \cos m\alpha dm,$$

где функции $H(m, \beta_i)$ и $M(m, \beta_i)$ определяются равенствами

$$H(m, \beta_i) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\alpha, \beta_i) \sin m\alpha d\alpha,$$

$$M(m, \beta_i) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(\alpha, \beta_i) \cos m\alpha d\alpha. \tag{15}$$

Из (12) и (14) окончательно получим следующие равенства:

$$\begin{gathered} mf'(m, \beta_i) = H(m, \beta_i), \\ (m^2+1) f(m, \beta_i) = M(m, \beta_i). \end{gathered} \quad (i = 1, 2) \tag{16}$$

Откуда и определяются коэффициенты A, B, C и D, при данных $\sigma_i(\alpha)$ и $\tau_i(\alpha)$. Таким образом, поставленная задача решается полностью при симметричном распределении нагрузки относительно оси OX. Точно таким же путем решается задача для не симметричных нагрузок, удовлетворяющих уравнениям равновесия. При этом вместо четырех коэффициентов интеграла Фурье будем иметь восемь, то есть

$$g\Phi_0 = \int_0^\infty [f_1(m, \beta) \cos m\alpha + f_2(m, \beta) \sin m\alpha]\, dm;$$

$$f_j = A_j \operatorname{ch} m\beta \cos\beta + B_j \operatorname{ch} m\beta \sin\beta + C_j \operatorname{sh} m\beta \cos\beta + D_j \operatorname{sh} m\beta \sin\beta.$$
$$(j = 1, 2).$$

В этом случае вместо (16) получится система: восемь уравнений с восьмью неизвестными A_j, B_j, C_j и D_j $(j = 1, 2)$.

Фиг. 2.

Теперь рассмотрим случай, когда на обе части отверстия соответственно приложены экспоненциально изменяющиеся нормальные нагрузки (фиг. 2)

$$\sigma_i(\alpha) = \begin{cases} Q_i e^{n\alpha} (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_i)^2 & (-\infty \leqslant \alpha \leqslant 0) \\ & (n \geqslant 2) \\ Q_i e^{-n\alpha} (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta_i)^2 & (0 \leqslant \alpha \leqslant \infty), \end{cases} \tag{17}$$

$$\tau_i(\alpha) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Здесь n — положительное число, не меньшее двух, а Q_i — параметры, связь между которыми получается из уравнений равновесия, которые в данном случае приводятся к одному уравнению

$$\int_0^\infty \frac{\sigma_1(\alpha)(1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta_1)}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_1)^2}\,d\alpha = \int_0^\infty \sigma_2(\alpha)\,\frac{1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta_2}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_2)^2}\,d\alpha.$$

Такой выбор нагрузки не только облегчает вычисление интегралов (13) и (15), но и дает возможность для осуществления предельного перехода (когда $n\to\infty$) к сосредоточенной силе.

Для этого случая из (13) имеем

$$\varphi(\alpha,\beta_i) = -K\,\frac{\operatorname{sh}2\alpha\sin 2\beta_i}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_i)^2},$$

$$\psi(\alpha,\beta_i) = a\int_0^\infty \frac{\sigma_i'(\gamma)}{\operatorname{ch}\gamma-\cos\beta_i}\,d\gamma \quad (i=1,\,2). \tag{18}$$

Подставляя значение подинтегральной функции и производя интегрирование, находим

$$\psi(\alpha,\beta_i) = \frac{aQ_i}{2}\left[\left(\frac{2-n}{n-1}\right)e^{-(n-1)\alpha} - \left(\frac{2+n}{n+1}\right)e^{-(n+1)\alpha} + 2\cos\beta e_i^{-n\alpha}\right]. \tag{19}$$

Тогда из (15), с помощью (18) и (19), получим

$$H(m,\beta_i) = -\frac{2K}{\pi}\sin 2\beta_i\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}2\alpha\sin m\alpha\,d\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)(\operatorname{sh}\alpha+\cos\beta_i)^2},$$

$$M(m,\beta_i) = \frac{aQ_i}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\frac{2-n}{n-1}\right)e^{-(n-1)\alpha} - \left(\frac{2+n}{n+1}\right)e^{-(n+1)\alpha} + 2\cos\beta_i e^{-n\alpha}\right]\cos m\alpha\,d\alpha. \tag{20}$$

Вычисляя второй интеграл (20), находим

$$M(m,\beta_i) = \frac{aQ_i}{\pi}\left[\frac{2-n}{m^2+(n-1)^2} - \frac{2+n}{m^2+(n+1)^2} + \frac{2n\cos\beta_i}{m^2+n^2}\right] (i=1,\,2). \tag{21}$$

Для вычисления первого интеграла (20) преобразуем подинтегральное выражение

$$\frac{\operatorname{sh}2\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_i)^2} = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}^2\alpha-\cos^2\beta_i} + \frac{\operatorname{sh}\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta_i)^2}.$$

Используя приложение [1], получим

$$H(m,\ \beta_2) = -2K\sin 2\beta_2 \left[\frac{\operatorname{sh} m\left(\frac{\pi}{2}-\beta_2\right)}{2\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}\cos\beta_2} + \frac{m\operatorname{sh} m\beta_2}{\operatorname{sh} m\pi\sin\beta_2}\right] (0<\beta_2<\pi),$$

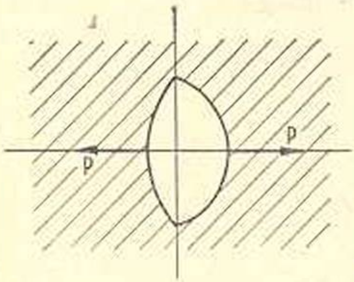
$$H(m,\ \beta_1) = -2K\sin 2\beta_1 \left[\frac{\operatorname{sh} m\left(\frac{\pi}{2}+\beta_1\right)}{2\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}\cos\beta_1} + \frac{m\operatorname{sh} m\beta_1}{\operatorname{sh} m\pi\sin\beta_1}\right] (-\pi<\beta_1<0). \tag{22}$$

Подставляя найденные значения $H(m, \beta_i)$ и $M(m, \beta_i)$ в (16) и учитывая (3), получим четыре алгебраических уравнения, решая которые находим функции $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$, после чего из (9) определяем коэффициент K.

Теперь, если на фиг. 2 подсчитать суммарные нагрузки, которые приложены на линиях $\beta=\beta_1$ и $\beta=\beta_2$ и каждую из них приравнять при $n\to\infty$ заданной величине P, то есть

$$\lim_{n\to\infty} 2a\int_0^\infty \sigma_i(\alpha)\frac{(1-\operatorname{ch}\alpha\cos\beta_i)}{(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta_i)^2}\,d\alpha = P \quad (i=1,\ 2), \tag{23}$$

то получим случай действия двух осевых сосредоточенных сил (фиг. 3).



Фиг. 3.

При этом из (17) и (23) получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_i}{n}(1-\cos\beta_i) = \frac{P}{2a}. \tag{24}$$

Из (21), с помощью (24), находим

$$M(m,\ \beta_i) = -\frac{P}{\pi} \quad (i=1,\ 2), \tag{25}$$

а функции $H(m, \beta_i)$ $(i=1, 2)$ остаются теми же, что и в (22). В этом случае функции $A(m)$, $B(m)$, $C(m)$ и $D(m)$ и коэффициент K определяются с помощью (3), (9), (16), (22) и (25).

Вычислительный центр
АН Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Поступила 31 X 1963

Վ. Վ. Եգանյան

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ՈՍՊՆԱՁԵՎ ԱՆՑՔՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ, ԵՐԲ ԱՆՑՔԻ ԵԶՐԱԳԾՈՎ ԱԶԴՈՒՄ Է ՏՎԱԾ ԲԵՌԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է ոսպնաձև անցքով անվերջ հարթության առաձգականության տեսության ընդհանուր խնդիրը, երբ անցքի եզրագծով ազդում է տված բեռը:

Խնդիրը դիտարկված է երկբևեռային կոորդինատներով, որի լուծումը՝ լարումների $g\Phi$ ֆունկցիան որոնվում է (6) տեսքով, որտեղ մտնող K գործակիցը և Ֆուրյեի ինտեգրալի գործակիցները որոշելու համար ստացվում են (9) և (16) շատ պարզ հավասարումները:

Դիտարկված է բեռի այնպիսի մասնավոր դեպք, որը ոչ միայն հեշտացնում է Ֆուրյեի ինտեգրալի գործակիցները որոշող (13) և (15) ինտեգրալների հաշվումը, այլ և հնարավորություն է տալիս սահմանային անցումով դիտարկելու կենտրոնացած ուժի դեպքը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950.
2. *Еганян В. В.* К плоской задаче теории упругости для полукруга. Известия АН АрмССР, серия физ-мат. наук, 11, № 6, 1958.
3. *Еганян В. В.* К плоской задаче теории упругости для круговой „луночки". Сборник научных трудов, Ереванский политехнический институт, № 20, 1959.
4. *Еганян В. В.* Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 1, 1964.