ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 4, 1964 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Е. Ш. Чацкая

Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости

Введение

В работах С. Я. Хавинсона [2], [3] и В. П. Хавина [8], [9] было найдено двойственное выражение для нижней грани сумм взвешенных модулей коэффициентов дробей, аппроксимирующих аналитическую на замкнутом множестве Г функцию $f_0(t)$, то есть найдено

$$J = \inf \sum_1^N |a_i F(\beta_i)|,$$

причем нижняя грань берется по таким системам $\{a_i\}_1^N$, $\{\beta_i\}_1^N$, что

$$\max_{t\in\Gamma} \left| f_0(t) - \sum_1^N \frac{a_i}{t-\beta_i} \right| \to 0,$$

а $F(t)$—аналитическая в дополнении к множеству Г функция, удовлетворяющая определенным требованиям. (Если, в частности, Г—конечной длины, то в качестве $F(t)$ можно взять $F(t) \equiv 1$, и тогда речь идет об $\inf \sum_1^N |a_i|$).

С другой стороны, Бишоп [4] доказал теорему, являющуюся усилением аппроксимационной теоремы М. А. Лаврентьева.

Теорема Бишопа. *Если f_0—непрерывная функция на компактном множестве Г без внутренних точек, имеющем связное дополнение в комплексной плоскости, и если $f_1, f_2, \cdots, f_n$—непрерывные функции на всюду разрывном компакте Γ^*, являющемся подмножеством Г, то существует последовательность $\{p_i\}$ таких полиномов, что $p_i \to f_0$ равномерно на Г при $i \to \infty$, а $p_i^{(k)} \to f_k$ равномерно на Γ^* при $i \to \infty$ для всех $1 \leqslant k < n$, где $p_i^{(k)}$ является k-ой производной от p_i.*

Пусть теперь Г—замкнутое нигде не плотное ограниченное множество, на котором всякая непрерывная функция может быть *равно-*

мерно аппроксимирована рациональными функциями. (Для этого, как показал А. Г. Витушкин [10], необходимо и достаточно, чтобы аналитическая емкость части дополнения к Г, попадающей в любой круг, равнялась аналитической емкости всего круга).

Применяя ход рассуждений работы Бишопа, можно доказать такой результат:

Теорема А. *Если функция $f_0(t)$ непрерывна на* Г, *а функции* $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ *непрерывны на замкнутом всюду разрывном множестве* $\Gamma^* \subset \Gamma$, *то найдется последовательность рациональных дробей* $\sum_1^N \frac{a_i}{t-\beta_i}$ *такая, что*

$$\max_{t \in \Gamma} \left| f_0(t) - \sum_1^N \frac{a_i}{t-\beta_i} \right| \to 0,$$

$$\max_{t \in \Gamma^*} \left| \varphi_\nu(t) - \sum_{i=1}^N \frac{(-1)^\nu \nu!\, a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}} \right| \to 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n.$$

Пусть Г и Г* такие, как в теореме А, $f_0(t)$—аналитична на Г, а $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ непрерывны на $\Gamma^* \subset \Gamma$. В настоящей статье с помощью теоремы двойственности (теорема 1''' § 1) и теоремы А методом работы [3] показано, что нижняя грань

$$J' = \inf \sum_1^N | a_i F(\beta_i) |$$

по системам $\{a_i\}_1^N$, $\{\beta_i\}_1^N$, для которых

$$\max_{t \in \Gamma} \left| f_0(t) - \sum_1^N \frac{a_i}{t-\beta_i} \right| \to 0,$$

$$\max_{t \in \Gamma^*} \left| \varphi_\nu(t) - \sum_{i=1}^N \frac{(-1)^\nu \nu!\, a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}} \right| \to 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n,$$

совпадает с J.

J' совпадает с J и в том случае, когда $f_0(t)$ непрерывна на множестве Г, так как на этом множестве любая непрерывная функция может быть приближена аналитическими.

Эти результаты применяются к изучению множеств аналитической емкости нуль. (Замкнутое множество Г имеет аналитическую емкость нуль, если в его дополнении G до расширенной плоскости любая ограниченная аналитическая функция $f(t)$ есть константа).

С. Я. Хавинсон и В. П. Хавин доказали следующую теорему:

Если аналитическая емкость множества Г *равна нулю, а* $\varphi(t)$ *непрерывна на* Г, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся точки* $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N$ *из* G *и числа* $a_1, a_2, \cdots, a_N$, *для которых*

$$\max_{t\in\Gamma}\left|\psi(t)-\sum_1^N \frac{a_i}{t-\beta_i}\right|<\varepsilon, \quad \sum_1^N |a_i|<\varepsilon.$$

Мы усиливаем этот результат:

Если функции $\varphi_\nu(t)$, $\nu=0, 1, 2,\cdots, n$ *непрерывны на множестве* Γ *нулевой аналитической емкости, то по всякому* $\varepsilon>0$ *найдутся такие* $\beta_1, \beta_2,\cdots, \beta_N$ *из множества* G *и коэффициенты* $a_1, a_2,\cdots, a_N$, *что*

$$\max_{t\in\Gamma}\left|\varphi_\nu(t)-\sum_{i=1}^N \frac{(-1)^\nu \nu!\, a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|<\varepsilon, \quad \nu=0, 1, 2,\cdots, n,$$

$$\sum_1^N |a_i|<\varepsilon.$$

Пользуюсь случаем поблагодарить профессора С. Я. Хавинсона за предложенную тему и помощь в работе.

§ 1. В этом параграфе мы будем придерживаться следующих обозначений:

$X=\{f\}$, $Y=\{\varphi\}$, $Z=\{\psi\}$—линейные локально-выпуклые топологические пространства (вещественные или комплексные);

$P(f)$, $P_1(\varphi)$, $P_2(\psi)$—непрерывные, симметричные, выпуклые функционалы соответственно в X, Y, Z;

$N_1\psi$—линейный непрерывный оператор из пространства Z в пространство Y;

Y_1—образ пространства Z при отображении N_1: $Y_1=N_1Z$;

$N\varphi$—линейный непрерывный оператор из Y_1 в пространство X;

$X^*=\{l\}$, $Y^*=\{\Lambda\}$, $Z^*=\{\lambda\}$—пространства, сопряженные с X, Y, Z соответственно;

A—множество троек линейных функционалов l, Λ, λ, удовлетворяющих условиям:

$$|l(f)|\leqslant P(f), \quad l\in X^*, \quad f\in X, \tag{1}$$

$$|\Lambda(\varphi)|\leqslant P_1(\varphi), \quad \Lambda\in Y^*, \quad \varphi\in Y, \tag{2}$$

$$|\lambda(\psi)|\leqslant P_2(\psi), \quad \lambda\in Z^*, \quad \psi\in Z, \tag{3}$$

$$l[N(N_1\psi)]-\Lambda(N_1\psi)-\lambda(\psi)=0, \quad \psi\in Z. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* f_0—*произвольный элемент из* X, *а* φ_0—*произвольный элемент из* Y. *Имеет место равенство*:

$$\sup_{(l,\Lambda,\lambda)\in A}|l(f_0)-\Lambda(\varphi_0)|=\inf_{\psi\in Z}\{P[f_0-N(N_1\psi)]+P_1(\varphi_0-N_1\psi)+P_2(\psi)\}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть T—топологическое произведение пространств X, Y, Z: $T=X\times Y\times Z$. Обозначим элемент T через F: $F=(f, \varphi, \psi)$, где $f\in X$, $\varphi\in Y$, $\psi\in Z$.

Рассмотрим в T непрерывный, симметричный, выпуклый функционал

$$P(F) = P(f) + P_1(\varphi) + P_2(\psi). \qquad (6)$$

Множество $\widetilde{T}$, состоящее из элементов $(N[N_1\psi];\ N_1\psi;\ \psi)$ образует подпространство в T. Пусть $T^* = \{L\}$ сопряженное к T пространство. Если обозначить через B множество функционалов $L \in T^*$, удовлетворяющих условиям:

$$L(F) \leqslant P(F), \quad F \in T, \qquad (7)$$

$$L(F) = 0, \qquad F \in \widetilde{T}, \qquad (8)$$

то к T, $\widetilde{T}$, $L(F)$ и $F_0 \in \widetilde{T}$ можно применить лемму 1 работы [1], утверждающую, что

$$\sup_{F \in B} |L(F_0)| = \inf_{F \in \widetilde{T}} P(F_0 - F). \qquad (9)$$

Так как любой функционал $L(F) \in T^*$ имеет вид

$$L(F) = L(f, \varphi, \psi) = l(f) - \Lambda(\varphi) - \lambda(\psi), \quad l \in X^*, \ \Lambda \in Y^*, \ \lambda \in Z^*, \qquad (10)$$

то каждому функционалу $L \in T^*$ можно сопоставить тройку функционалов его представления (10):

$$L = (l, \Lambda, \lambda).$$

Покажем, что функционалы L, удовлетворяющие условию (7), состоят из тех и только тех троек (l, Λ, λ), для которых выполняются условия (1), (2), (3).

Действительно, из выполнения неравенств (1), (2), (3) для любого $F \in T$ имеем:

$$|L(F)| = |l(f) - \Lambda(\varphi) - \lambda(\psi)| \leqslant |l(f)| + |\Lambda(\varphi)| + |\lambda(\psi)| \leqslant$$
$$\leqslant P(f) + P_1(\varphi) + P_2(\psi) = P(F).$$

Поэтому из совместного выполнения условий (1)—(2)—(3) следует (7).

Если же мы для произвольного $f \in X$ рассмотрим элемент $F = (f, 0, 0)$, то из (7) получается (1). Аналогично, из (7) следуют (2) и (3).

Ясно также, что функционалы L, удовлетворяющие на подпространстве $\widetilde{T}$ соотношению (8), состоят из троек функционалов (l, Λ, λ), связанных соотношением (4). Применив к элементу $F_0 = (f_0, \varphi_0, 0)$ равенство (9) и использовав (10), (1)—(4) и (6), получим равенство (5). Теорема 1 доказана.

Пусть Z — N-мерное эвклидово вещественное или комплексное пространство, состоящее из точек

$$\psi = (a) = (a_1, a_2, \cdots, a_N).$$

Положим $P_2(a) = P_2(a_1, a_2, \cdots, a_N) = \sum_1^N \varepsilon_i |a_i|$, где $\varepsilon_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots N$.

—заданные числа. Линейный непрерывный функционал $\lambda(a)$ имеет вид

$$\lambda(a)=\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_N)=\sum_1^N c_i a_i.$$

Оператор $N_1\psi=N_1 a$ зададим равенством

$$N_1 a=a_1 g_1+a_2 g_2+\cdots+a_N g_N,$$

где $g_i \in Y$, $i=1, 2, \cdots, N$ линейно независимы.

В нашем случае условия (3) и (4) перепишутся так:

$$\left|\sum_1^N c_i a_i\right| \leqslant \sum_1^N \varepsilon_i |a_i|, \tag{3'}$$

$$l\left(\sum_1^N a_i N g_i\right)-\Lambda\left(\sum_1^N a_i g_i\right)-\sum_1^N c_i a_i=0. \tag{4'}$$

Полагая $a_k=1$, $a_i=0$ при $i \neq k$, получим равносильные (3′) и (4′) условия:

$$|c_i| \leqslant \varepsilon_i, \qquad i=1, 2, \cdots, N \tag{3''}$$

$$c_i=l(Ng_i)-\Lambda(g_i), \quad i=1, 2, \cdots, N. \tag{4''}$$

Объединяя (3″) и (4″), имеем

$$|l(Ng_i)-\Lambda(g_i)| \leqslant \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \cdots, N. \tag{3'''}$$

Отсюда получаем частный случай теоремы 1.

Теорема 1′.

$$\sup_{l, \Lambda} |l(f_0)-\Lambda(\varphi_0)| = \inf_{a_1, a_2, \cdots, a_N} \left\{P\left(f_0-\sum_1^N a_i N g_i\right)+\right.$$

$$\left.+P_1\left(\varphi_0-\sum_1^N a_i g_i\right)+\sum_1^N \varepsilon_i |a_i|\right\}. \tag{11}$$

Верхняя грань берется по всем линейным функционалам l, Λ, удовлетворяющим неравенствам:

$$|l(f)| \leqslant P(f), \quad l \in X^*, \ f \in X, \tag{12}$$

$$|\Lambda(\varphi)| \leqslant P_1(\varphi), \quad \Lambda \in Y^*, \ \varphi \in Y, \tag{13}$$

$$|l(Ng_i)-\Lambda(g_i)| \leqslant \varepsilon_i, \quad i=1, 2, \cdots, N. \tag{14}$$

Пусть Γ и Γ^*—ограниченные замкнутые множества комплексной плоскости.

$X=C(\Gamma)$, $Y=C(\Gamma^*)$ — пространства непрерывных комплекснозначных функций, заданных соответственно на Γ и Γ^*.

$$g_i(t)=\frac{-1}{(t-\beta_i)^2}, \text{ а } Ng_i(t)=\frac{1}{t-\beta_i}, \quad i=1, 2, \cdots, N, \tag{15}$$

где точки β_i лежат вне множеств Γ и Γ^*.

Теорема $1''$. *Для произвольных* $f_0 \in C(\Gamma)$ *и* $\varphi_0 \in C(\Gamma^*)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\mu,\lambda}\left|\int_\Gamma f_0 d\mu - \int_{\Gamma^*}\varphi_0 d\lambda\right| = \inf_{a_1, a_2, \cdots, a_N}\left\{K\max_\Gamma\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_i}{t-\beta_i}\right|+\right.$$

$$\left.+K_1\max_{\Gamma^*}\left|\varphi_0(t)+\sum_1^N\frac{a_i}{(t-\beta_i)^2}\right|+\sum_1^N\varepsilon_i|a_i|\right\}. \qquad (16)$$

Верхняя грань в левой части равенства (16) берется по комплексным мерам $\mu(e)$ *и* $\lambda(e)$, *заданным на борелевских подмножествах* Γ *и* Γ^* *соответственно и удовлетворяющих условиям*

$$\int_\Gamma|d\mu|\leqslant K, \quad \int_{\Gamma^*}|d\lambda|\leqslant K_1, \qquad (17)$$

$$\left|\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-\beta_i}+\int_{\Gamma^*}\frac{d\lambda}{(t-\beta_i)^2}\right|\leqslant\varepsilon_i, \quad i=1,2,\cdots,N. \qquad (18)$$

Замечание.

Пусть Γ и Γ^* те же, что в теореме $1''$, $f_0(t)$—непрерывна на Γ, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ непрерывны на Γ^*, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$—неотрицательные числа.

Тем же методом, которым была получена теорема $1''$, получается Теорема $1'''$

$$\sup_{\mu,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n}\left|\int_\Gamma f_0 d\mu - \sum_{k=1}^n\int_{\Gamma^*}\varphi_k d\lambda_k\right| =$$

$$=\inf_{a_1,a_2,\cdots,a_N}\left\{K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_i}{t-\beta_i}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^n K_\nu\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_\nu(t)-\sum_1^N\frac{(-1)^\nu\nu!\,a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|+\sum_1^N\varepsilon_i|a_i|\right\}.$$

В левой части последнего равенства верхняя грань берется по комплексным мерам $\mu(e)$, *заданным на борелевских подмножествах* Γ, *и комплексным мерам* $\lambda_1(e), \cdots, \lambda_n(e)$, *заданным на борелевских подмножествах* Γ^*. *Кроме того, меры* μ *и* λ_i *связаны следующими соотношениями*:

$$\int_\Gamma|d\mu|\leqslant K, \quad \int_{\Gamma^*}|d\lambda_\nu|\leqslant K_\nu, \quad \nu=1,2,\cdots,n,$$

$$\left|\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-\beta_i}+\sum_{\nu=1}^n\int_{\Gamma^*}\frac{(-1)^\nu\nu!\,d\lambda_\nu}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|\leqslant\varepsilon_i, \quad i=1,2,\cdots,N.$$

§ 2. Пусть Γ—произвольное замкнутое, ограниченное множество комплексной плоскости, а G—дополнительное к Γ открытое множество. Рассмотрим возрастающую последовательность открытых множеств $\{G_n\}$, содержащихся в G и исчерпывающих G. Будем считать, что каждое G_n состоит из конечного числа конечносвязных областей и содержит ∞. Границы Γ_n множеств G_n предполагаем жордановыми спрямляемыми кривыми.

Если наши множества $\{G_n\}$ обладают тем свойством, что

$$\lim_{n\to\infty} \text{дл. } \Gamma_n < +\infty,$$

то скажем, что Γ имеет конечную длину по Пенлеве, а

$$\inf_{\{G_n\}} \lim_{n\to\infty} \text{ дл. } \Gamma_n = l(\Gamma)$$

назовем длиной по Пенлеве множества Γ.

Для произвольного открытого множества D, содержащего бесконечно удаленную точку, через $B'(D)$, будем обозначать класс однозначных аналитических в D функций $\psi(z)$, для которых $|\psi(z)|\leqslant 1$, а $\psi(\infty)=0$.

Введем, следуя [3], еще один класс аналитических в G функций. Будем считать однозначную аналитическую функцию $F(z)$ принадлежащей классу $E_1(\{G_n\})$ (класс E_1 рассматривается относительно фиксированной последовательности открытых множеств $\{G_n\}$, исчерпывающих G), если существует последовательность функций $\{F_m(z)\}$, равномерно сходящаяся внутри G к $F(z)$ и удовлетворяющая условиям:

а) $F_m(z)\in E_1(G_{n_m})$, $n_m\to\infty$ при $m\to\infty$. Точнее: если $G_{n_m}=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_{k_m}$, где $D_1, D_2,\cdots, D_{k_m}$—непересекающиеся конечносвязные области, то $F_m(z)\in E_1(D_j)$, $j=1,\cdots,k_m$ (определение класса E_1 в конечносвязной области см. в работе [7]);

б)

$$\int_{\Gamma_{n_m}} |F_m(z)|\,ds\leqslant K(F)<+\infty. \tag{19}$$

Положим для любой функции $F(z)\in E_1(\{G_n\})$

$$\|F\|=\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_{n_m}} |F_m(z)|\,ds. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть Γ—замкнутое нигде не плотное множество, на котором любая непрерывная функция может быть равномерно аппроксимирована рациональными, а Γ^*—всюду разрывное подмножество Γ. Если $F(z)\in E_1(\{G_n\})$, $F(\infty)\neq 0$, $f_0(z)$ аналитична на Γ, а $\varphi_0(z)$ непрерывна на Γ^*, то при достаточно больших $K>0$ и любых $K_1>0$ выполняется равенство:*

$$\sup_{\psi\in B'(G)}\left|\int_\gamma \psi(z)F(z)f_0(z)\,dz\right| = \inf_{\substack{\{\beta_l\}\subset G\\ \{a_l\}}}\left[K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right| + \right.$$

$$\left. + K_1\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_0(t)+\sum_1^N\frac{a_l}{(t-\beta_l)^2}\right| + 2\pi\sum_1^N|a_l F(\beta_l)|\right]. \tag{21}$$

(В равенстве (21) γ—сложный контур, идущий в G, охватывающий Γ и такой, что на нем $f_0(z)$ еще аналитична).

Докажем сначала, что левая часть равенства (21) не превосходит правой.

Для $F(z)\in E_1(\{G_n\})$ и произвольной $\psi(z)\in B'(G)$ имеем

$$\psi(z)F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-z}, \tag{22}$$

где μ—некоторая мера и

$$\int_\Gamma|d\mu|\leqslant K_0(F), \tag{23}$$

причем K_0 зависит только от $F(z)$ (см. [3]).

Возьмем в G любые N точек: $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N$. Для произвольных чисел $a_1, a_2, \cdots, a_N$, положительных $K>K_0$ и K_1, любых функций $\psi(z)\in B'(G)$ имеем

$$\left|\int_\gamma\psi(z)F(z)f_0(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f_0(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-z}\,dz\right| =$$

$$=\left|\int_\Gamma d\mu\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f_0(z)\,dz}{t-z}\right\}\right| = \left|\int_\Gamma f_0(t)\,d\mu\right| =$$

$$=\left|\int_\Gamma d\mu\left\{\left[f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right]+\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right|\int_\Gamma|d\mu| + \left|\sum_1^N a_l\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-\beta_l}\right|\leqslant$$

$$\leqslant K_0\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right| + 2\pi\left|\sum_1^N a_l\psi(\beta_l)F(\beta_l)\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right| + 2\pi\sum_1^N\left|a_l F(\beta_l)\right| +$$

$$+ K_1\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_0(t)+\sum_1^N\frac{a_l}{(t-\beta_l)^2}\right|. \tag{24}$$

В силу произвольности $\psi(z)$, $\{a_l\}_1^N$, $\{\beta_l\}_1^N$:

$$\sup_{\psi\in B'(G)}\left|\int_\gamma \psi(z)F(z)f_0(z)\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\substack{\{\beta_l\}\subset G\\ \{a_l\}}}\left[K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_l}{t-\beta_l}\right|+\right.$$

$$\left.+K_1\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_0(t)+\sum_1^N\frac{a_l}{(t-\beta_l)^2}\right|+2\pi\sum_1^N|a_lF(\beta_l)|\right]. \qquad (25)$$

Чтобы доказать обратное неравенство, нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть* Γ, Γ^*, $F(z)$ *такие, как в теореме 2. Рассмотрим класс* M_{k,k_1}, *элементами которого служат пары мер* μ *и* λ, *причем* μ *задана на* Γ, λ — *на* Γ^* *и*

$$\int_\Gamma|d\mu|\leqslant K,\quad \int_{\Gamma^*}|d\lambda|\leqslant K_1, \qquad (26)$$

$$\left|\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-z}+\int_{\Gamma^*}\frac{d\lambda}{(t-z)^2}\right|\leqslant F(z),\quad z\in G. \qquad (27)$$

Тогда при $K\geqslant K(F)$ (см. формулу (19)) *и любом* K_1 *имеем*

$$M_{k,k_1}=M_{k,0}=M_{k_0(F),0}. \qquad (28)$$

Доказательство. Положим

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_\Gamma\frac{d\mu}{t-z}+\int_{\Gamma^*}\frac{d\lambda}{(t-z)^2}\right\},\quad z\in G. \qquad (29)$$

Функция

$$\frac{H(z)}{F(z)}=\psi(z)\in B'(G), \qquad (30)$$

то есть $H(z)=F(z)\psi(z)$, где $F(z)\in E_1(\{G_n\})$, $\psi(z)\in B'(G)$.

Поэтому $H(z)$ представляется интегралом типа Коши-Стильтьеса:

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d\nu}{t-z},\quad z\in G, \qquad (31)$$

причем

$$\int_\Gamma|d\nu|\leqslant K_0(F)\leqslant K.$$

Из (29) и (31) следует, что

$$\int_{\Gamma}\frac{d\mu}{t-z}+\int_{\Gamma^*}\frac{d\lambda}{(t-z)^2}\equiv\int_{\Gamma}\frac{d\nu}{t-z},\quad z\in G,$$

или

$$\int_{\Gamma^*}\frac{d\mu-d\nu}{t-z}+\int_{\Gamma^*}\frac{d\lambda}{(t-z)^2}\equiv 0,\quad z\in G. \tag{32}$$

Из теоремы А следует, что $\mu\equiv\nu$, $\lambda\equiv 0$.

Отсюда $H(z)$ является функцией вида

$$H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\mu}{t-z},\quad z\in G, \tag{33}$$

и

$$\int_{\Gamma}|d\mu|\leqslant K_0(F).$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 2. Очевидно, верхняя грань в (21) только уменьшится, если ее брать по функциям $\psi(z)$, определенным равенством (30) с $H(z)$, у которых $\lambda=0$:

$$\sup_{\psi\in B'(G)}\left|\int_{\gamma}\psi(z)F(z)f_0(z)\,dz\right|\geqslant\sup_{H(z)}\left|\int_{\gamma}H(z)f_0(z)\,dz\right|=$$

$$=\sup_{\mu\in M_{k,0}}\left|\int_{\gamma}f_0(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\mu}{t-z}\right\}dz\right|=\sup_{\mu\in M_{k,0}}\left|\int_{\Gamma}f_0(t)\,d\mu\right|. \tag{34}$$

Вследствие того, что, по лемме, при $K\geqslant K_0(F)$ и любом K_1 $M_{k,0}=M_{k,k_1}$

$$\sup_{\mu\in M_{k,0}}\left|\int_{\Gamma}f_0(t)\,d\mu\right|=\sup_{(\mu,\lambda)\in M_{k,k_1}}\left|\int_{\Gamma}f_0(t)\,d\mu-\int_{\Gamma^*}\varphi_0(t)\,d\lambda\right|. \tag{35}$$

Если $\{\beta_l\}$ — счетное всюду плотное в G множество, то класс M_{k,k_1} совпадает с классом пар мер μ и λ, удовлетворяющих условиям (26) и

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\Gamma}\frac{d\mu}{t-\beta_l}+\int_{\Gamma^*}\frac{d\lambda}{(t-\beta_l)^2}\right\}\right|\leqslant F(\beta_l),\quad l=1,2,3,\cdots \tag{36}$$

Обозначим через $M_{k,k_1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)$ класс мер, удовлетворяющих неравенствам (26) и первым l неравенствам (36).

Ясно, что $M_{k,k_1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)\supset M_{k,k_1}$, поэтому из слабой компактности семейства мер μ, λ с равномерно ограниченными вариациями получаем при достаточно больших l

$$\sup_{(\mu,\lambda)\in M_{k,k_1}}\left|\int_{\Gamma}f_0(t)\,d\mu-\int_{\Gamma^*}\varphi_0(t)\,d\lambda\right|>\sup_{(\mu,\lambda)\in M_{k,k_1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l)}\left|\int_{\Gamma}f_0(t)\,d\mu-\right.$$

$$-\int\limits_{\Gamma^*}\varphi_0(t)\,d\lambda\Big|-\varepsilon=\inf_{a_1,a_2,\cdots,a_l}\left[K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^l\frac{a_i}{t-\beta_i}\right|+\right.$$

$$\left.+K_1\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_0(t)+\sum_1^l\frac{a_i}{(t-\beta_i)^2}\right|+2\pi\sum_1^l|a_iF(\beta_i)|\right]-\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\inf_{\substack{\{a_i\}\\ \{\beta_i\}\subset G}}\left[K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)+\sum_1^N\frac{a_i}{t-\beta_i}\right|+\right.$$

$$\left.+K_1\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_0(t)+\sum_1^N\frac{a_i}{(t-\beta_i)^2}\right|+2\pi\sum_1^N|a_iF(\beta_i)|\right]-\varepsilon. \qquad (37)$$

В силу произвольности ε это неравенство вместе с (34) и (25) полностью доказывает теорему.

Если вместо теоремы 1'' применить теорему 1''', то получим более сильный результат.

Теорема 2'. *Пусть $\Gamma, \Gamma^*, \gamma, F(z), f_0(z)$ те же, что в теореме 2. Если функции $\varphi_1(z), \varphi_2(z),\cdots,\varphi_n(z)$ непрерывны на Γ^*, то при всех достаточно больших $K>0$ и любых $K_1>0,\cdots,K_n>0$ справедливо равенство*

$$\sup_{\psi\in B'(G)}\left|\int\limits_\gamma\psi(z)F(z)f_0(z)\,dz\right|=\inf_{\substack{\{\beta_i\}\subset G\\ \{a_i\}}}\left[K\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_1^N\frac{a_i}{t-\beta_i}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^n K_\nu\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_\nu(t)-\sum_{i=1}^N\frac{(-1)^\nu\nu!\,a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|+2\pi\sum_{i=1}^N|F(\beta_i)\,a_i|\right]. \qquad (38)$$

Следствие 1. *В силу того, что числа $K, K_1, K_2,\cdots,K_n$ могут быть как угодно велики, все члены правой части равенства (38), кроме последнего, должны стремиться к нулю. Поэтому формула (38) может быть сведена к формуле*

$$\sup_{\psi\in B'(G)}\left|\int\limits_\gamma\psi(z)F(z)f_0(z)\,dz\right|=\inf_{\substack{\{\beta_i\}\subset G\\ \{a_i\}}}2\pi\sum_1^N|a_iF(\beta_i)|, \qquad (39)$$

причем нижняя грань берется по системам точек $\{\beta_i\}$ из области G и чисел $\{a_i\}$, для которых

$$\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_{i=1}^N\frac{a_i}{t-\beta_i}\right|\to 0, \qquad (40)$$

$$\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_\nu(t)-\sum_{i=1}^N\frac{(-1)^\nu\nu!\,a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|\to 0,\quad \nu=1,2,\cdots,n. \qquad (41)$$

Следствие 2. *Если $l(\Gamma) < +\infty$ и если выполняются условия (40)—(41), то*

$$\inf_{\substack{\{\beta_i\}\subset G\\ \{a_i\}}} 2\pi\sum_1^N |a_i| = \sup_{\psi\in B'(G)}\left|\int_\Gamma \psi(z) f_0(z)\,dz\right|. \tag{42}$$

Действительно, в случае, когда множество Γ имеет конечную длину по Пенлеве, функция $F(z)\equiv 1\in E_1(\{G_n\})$.

Замечания.

1) Левая часть формулы (42) при выполнении условий (40)—(41) та же, что левая часть формулы (42) при выполнении только одного условия (40).

Это вытекает из следствия 2 теоремы 1 работы [3].

Таким образом, нижняя грань сумм модулей коэффициентов рациональных дробей, аппроксимирующих аналитическую на множестве Γ функцию $f_0(t)$, не изменится, если одновременно приближать производными от этих дробей любую конечную систему непрерывных на Γ^* функций.

2) Так как на множестве Γ любая непрерывная функция может быть приближена рациональными [10], то замечание 1 остается верным и тогда, когда $f_0(t)$ непрерывна на Γ.

Используя лемму, теоремы § 1 настоящей статьи и схему доказательства теоремы 2 работы [3], можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $f_0(t)$ непрерывна на множестве Γ, состоящем из конечного числа спрямляемых кривых Жордана, среди которых могут быть и замкнутые контуры и дуги, а функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ непрерывны на замкнутом всюду разрывном множестве $\Gamma^*\subset\Gamma$, тогда нижняя грань*

$$\inf_{\substack{\{\beta_i\}\subset G\\ \{a_i\}}} \sum_1^N |a_i| \tag{43}$$

при выполнении условий

$$\max_{t\in\Gamma}\left|f_0(t)-\sum_{i=1}^N \frac{a_i}{t-\beta_i}\right|\to 0, \tag{44}$$

$$\max_{t\in\Gamma^*}\left|\varphi_\nu(t)-\sum_{i=1}^N \frac{(-1)^\nu \nu!\, a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|\to 0,\quad \nu=1,\ 2,\cdots,n, \tag{45}$$

совпадает с нижней гранью (43) при выполнении условий (45) и

$$\int_\Gamma\left|f_0(t)-\sum_{i=1}^{N_1} \frac{a_i}{t-\beta_i}\right|^p ds\to 0, \tag{46}$$

где $p\geqslant 1$—любое число.

То же значение нижней грани получается при выполнении только условия (44) или только условия (46). Величина рассматриваемой нижней грани равна

$$\sup_{\psi\in B'(G)} \left| \int_\Gamma \psi(t) f_0(t)\, dt \right|$$

(Здесь $\psi(t)$—разность граничных значений $\psi(z)$ с двух сторон кривой Г).

§ 3. Применим предыдущие теоремы для усиления результатов С. Я. Хавинсона [2], [3] и В. П. Хавина [8], [9] об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль. Аналитической емкостью множества Г называют, как известно, величину

$$\Omega(\Gamma) = \sup_{\psi(z)\in B'(G)} \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \psi(z)\, dz \right|,$$

причем под G мы понимаем ту из дополнительных к Г областей, которая содержит бесконечность. Тут γ—произвольный контур, охватывающий Г и проходящий в области G.

Очевидно, что для любой $F(z) \in E_1(\{G_n\})$, $F(\infty)=1$, имеем

$$\Omega(\Gamma) = \sup_{\psi\in B'(G)} \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \psi(z) F(z) dz \right|.$$

Условие $\Omega(\Gamma)=0$ равносильно тому, что класс $B'(G)$ содержит только одну функцию—тождественный нуль.

Теорема 4. *Если функции* $\varphi_\nu(t)$, $\nu=0, 1, \cdots, n$ *непрерывны на множестве* Г *нулевой емкости, то по всякому* $\varepsilon>0$ *найдутся такие точки* $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_N$ *из множества* G *и коэффициенты* $a_1, a_2, \cdots, a_N$, *что*

$$\max_{t\in\Gamma} \left| \varphi_\nu(t) - \sum_{l=1}^{N} \frac{(-1)^\nu \nu!\, a_l}{(t-\beta_l)^{\nu+1}} \right| < \varepsilon, \quad \nu=0, 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{1}^{N} |a_l| < \varepsilon.$$

Доказательство. Из условия $\Omega(\Gamma)=0$ следует, что Г—всюду разрывное множество. По аппроксимационной теореме Лаврентьева [5] непрерывную функцию $f_0(t)$ на всюду разрывном множестве Г можно равномерно аппроксимировать полиномами. Поэтому нашу теорему достаточно доказать для аналитической на Г функции $\varphi_0(t)$ и непрерывных на Г функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$. Доказательство следует теперь из формулы (38), если учесть, что из условия $\Omega(\Gamma)=0$ вытекает принадлежность $F(z)=1$ классу $E_1(\{G_n\})$ (см. теорему 3 работы [3]).

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила 17 XII 1963

Ե. Շ. Չացկայա

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻԱԺԱՄԱՆԱԿՅԱ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՓԱԿ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ապացուցված են մի շարք արդյունքներ ռացիոնալ կոտորակների գործակիցների վերաբերյալ այն դեպքում, երբ այդ կոտորակները ապրոքսիմացիայի են ենթարկում տվյալ ֆունկցիան, իսկ նրանց ածանցյալները մոտարկում են մեկ այլ ֆունկցիա։ Բնորոշ արդյունք է հանդիսանում 4-րդ թեորեմը, որը հետևյալն է.

Դիցուք $\{\varphi_\nu(t)\}$, $\nu=0, 1,\cdots, n$, *ֆունկցիաները անընդհատ են* Γ *սահմանափակ և փակ բազմության վրա, որի լրացման մեջ յուրաքանչյուր սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիա անհրաժեշտաբար հաստատուն է։ Այդ դեպքում ցանկացած* $\varepsilon>0$ *թվի համար գոյություն ունեն այնպիսի* $\beta_1,\cdots\beta_N$ *կետեր և* $a_1, a_2,\cdots, a_N$ *թվեր, որ*

$$\max_{t\in\Gamma}\left|\varphi_\nu(t)-\sum_{i=1}^{N}\frac{(-1)^\nu\nu!\,a_i}{(t-\beta_i)^{\nu+1}}\right|<\varepsilon,\quad \nu=0,\ 1,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{N}|a_i|<\varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хавинсон С. Я.* О двух классах экстремальных задач для полиномов и моментов. Известия АН СССР, серия матем., **25**, № 4, 1961, 557–590.
2. *Хавинсон С. Я.* Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль. ДАН СССР, **131**, № 1, 1960, 44–46.
3. *Хавинсон С. Я.* Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов. Труды М. И. А. Н., **LX**.
4. *Bishop E.* Simultaneous approximation by a polynomial and its derivatives. Proc. Amer. Math. Soc., v. **10**, 1959, p. p. 741–743.
5. *Lavrentiev M.* Sur les fonctions d'une variable complex representable par des series de polynomes. Actualites Sci. Jnd., Paris, 1936.
6. *Халмош П.* Теория меры. ИЛ, 1953.
7. *Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я.* Некоторые классы аналитических функций в многосвязных областях. В сб. „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного". Физматгиз, М.—Л., 1960.
8. *Хавин В. П.* О пространстве ограниченных регулярных функций. ДАН СССР, **131**, № 1, 1960, 40—43.
9. *Хавин В. П.* О пространстве ограниченных регулярных функций. Сиб. матем. журнал, т. **2**, № 4, 1961, 622—638.
10. *Витушкин А. Г.* Условия на множество, необходимые и достаточные для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множестве функции. Доклады АН СССР, **128**, № 1, 1959, 17—20.