ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 3, 1964 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

В. И. Мацейчик, И. И. Ивахнин

Об устойчивости длинных скрученных стержней при воздействии температурных напряжений

Вопросом устойчивости стержней при действии осевой силы и крутящего момента без учета силы веса и температурных напряжений занимались А. Г. Гринхилл [1], Л. С. Лейбензон [2], А. Н. Динник [3], Е. Л. Николаи [4] и другие. Влияние температурных напряжений на потерю устойчивости тонких стержней рассмотрено в работах [6] и [7].

В данной статье исследуется устойчивость вертикального длинного тонкого стержня при воздействии скручивающего момента, осевой силы, равномерно распределенной нагрузки и температуры, меняющейся по линейному закону.

Этот вопрос имеет большое практическое значение при бурении скважин. При увеличении глубин скважин изменяется температура, которая оказывает влияние на растягивающую силу, обеспечивающую постоянное давление долота на забой.

Рассматривая бурильную колонну как стержень с защемленными концами, будем искать критическое давление долота на забой, при котором возможно нейтральное равновесие колонны.

Обозначим:

l — длина колонны,

M_z — крутящий момент,

q — вес одного погонного метра бурильной колонны в глинистом растворе,

ΔT_1 и ΔT_2 — приращение температуры на верхнем и нижнем концах стержня,

P — растягивающая сила.

Так как концы колонны защемлены, в ней под воздействием температуры возникнет нормальное сжимающее усилие, которое имеет величину

$$Q = \alpha EF\Delta T, \tag{1}$$

где

$$\Delta T = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}.$$

Давление долота на забой будет равно

$$S = \frac{1}{2} ql + Q - P. \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения упругого равновесия имеют вид

$$\frac{EJ}{l^2}\frac{d^4u}{d\zeta^4}+\frac{M_z}{l}\frac{d^3v}{d\zeta^3}+(S-q\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2}-ql\frac{du}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{EJ}{l^2}\frac{d^4v}{d\zeta^4}-\frac{M_z}{l}\frac{d^3u}{d\zeta^3}+(S-q\zeta)\frac{d^2v}{d\zeta^2}-ql\frac{dv}{d\zeta}=0, \tag{3}$$

где u и v—проекции перемещения на оси x и y, $\zeta=\frac{z}{l}$, ось z направлена по оси стержня. Для защемленных концов граничные условия будут

$$\text{при } \zeta=0 \quad u=0, \quad \frac{du}{d\zeta}=0, \quad v=0, \quad \frac{dv}{d\zeta}=0;$$

$$\text{при } \zeta=1 \quad u=0, \quad v=0, \quad \frac{du}{d\zeta}=0, \quad \frac{dv}{d\zeta}=0. \tag{4}$$

Решение системы уравнений (3) будем искать методом Бубнова-Галеркина. Так как при малых деформациях упругая линия мало отличается от плоской кривой, то аппроксимирующие функции выберем в виде

$$u=ae^{-\beta\zeta}\zeta^2(1-\zeta)^3 \quad \text{и} \quad v=be^{-2\beta\zeta}\zeta^2(1-\zeta)^2. \tag{5}$$

Выбор таких функций соответствует экспериментальным исследованиям [5], а также физическим соображениям.

Функции (5) полностью удовлетворяют граничным условиям (4). Применяя метод Бубнова-Галеркина, после преобразований и упрощений получим систему двух однородных линейных уравнений относительно a и b

$$\left(3\frac{EJ}{l^2}\beta^2-S+\frac{3}{2\beta}ql\right)a+\frac{32}{81}\beta\frac{M_z}{l}b=0,$$

$$\frac{256}{81}\beta\frac{M_z}{l}a+\left(12\frac{EJ}{l^2}\beta^2-S-\frac{3}{4\beta}ql\right)b=0. \tag{6}$$

Составляя определитель этой системы и приравнивая его нулю, получаем выражение, в которое входят все факторы, определяющие устойчивость колонны

$$S^2-\left(15\frac{EJ}{l^2}\beta^2+2{,}25\frac{ql}{\beta}\right)S+36\left(\frac{EJ}{l^2}\beta^2\right)^2+$$

$$+20{,}25\frac{EJ}{l}\beta q+1{,}125\frac{(ql)^2}{\beta^2}-1{,}25\left(\frac{M_z}{l}\right)^2\beta^2=0. \tag{7}$$

Решая уравнение (7) относительно S, получим

$$S = 7{,}5\,\frac{EJ}{l^2}\,\beta^2 + 1{,}125\,\frac{ql}{\beta} - \sqrt{\left(4{,}5\,\frac{EJ}{l^2} - 0{,}375\,\frac{ql}{\beta}\right)^2 + 1{,}25\left(\frac{M_z}{l}\right)^2\beta^2}. \tag{8}$$

Параметр β надо подобрать так, чтобы S имело минимальное значение то есть

$$\frac{dS}{d\beta} = 0,$$

откуда

$$\beta^{12} - 0{,}448\,\frac{ql^3}{EJ}\,\beta^9 + 0{,}062\left(\frac{ql^3}{EJ}\right)^2\beta^6 - 0{,}003\left(\frac{ql^3}{EJ}\right)^3\beta^3 + $$

$$+ 0{,}00005\left(\frac{ql^3}{EJ}\right)^4 = 0. \tag{9}$$

В уравнении (9) пренебрегли членами, содержащими M_z, так как они мало влияют на величину β. Уравнение (9) решаем методом последовательных приближений. Действительный корень, при котором S принимает минимальное значение, оказался равным

$$\beta = 0{,}355\sqrt[3]{\frac{ql^3}{EJ}}.$$

Следовательно,

$$S_{kp} = 4{,}104\sqrt[3]{q^2EJ} - \sqrt{0{,}243\sqrt[3]{q^4E^2J^2} + 0{,}157M_z^2\sqrt[3]{\frac{q^2}{E^2J^2}}}.$$

Значение S_{kp} не зависит от длины колонны.

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 5 IX 1963

Վ. Ի. Մացեյչիկ, Ի. Ի. Իվախնենկո

ՈԼՈՐՎԱԾ ԵՐԿԱՐ ՁՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում հետազոտվում է հիմքերի վրա կիրառված M_z ոլորող մոմենտների, P առանցքային ուժերի, q ինտենսիվության հավասարաչափ բաշխված բեռի և գծային օրենքով փոփոխվող ջերմային ազդեցության տակ գտնվող ուղղաձիգ երկար բարակ ձողի կայունությունը։

Օգտվելով Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդից, որոշված է ձողի տաքացման այն կրիտիկական ջերմաստիճանի արտահայտությունը, որի դեպքում ձողն սկսում է ծռվել։

Ստացված արդյունքները կարող են օգտագործվել հորատման սյուների այն կայունության հետազոտման ժամանակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Greenhill A. G.* Proc. Inst. Mech. Eng. London, 1883.
2. *Лейбензон Л. С.* Собр. трудов, т. I. Изд-во АН СССР, 1951.
3. *Динник А. Н.* Избр. труды, т. II. Изд-во АН УССР, 1956.
4. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. Гос. Изд-во технико-экономической лит., М., 1955.
5. *Балицкий П. В.* Исследование на механической модели статической устойчивости колонны бурильных труб. Нефтяное машиностроение, т. III. Гостоптехиздат, М., 1958.
6. *Сароян А. Е.* НХ № 11, 1960.
7. *Мацейчик В. И., Ивахнин И. И., Асатурян А. Ш.* Нефть и газ, № 10, 1961.