

В. С. Виденский

О тригонометрических многочленах полуцелого, порядка

Обозначим через $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ класс многочленов вида

$$s(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ a_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)t + b_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t \right\}, \quad (1)$$

которые называют тригонометрическими многочленами полуцелого порядка. В последние годы А. Х. Турецкий [1,2] и А. И. Пулатов [3,4] рассмотрели некоторые задачи об интерполировании, механических квадратурах и разложении функций в ряды по ортогональным многочленам вида (1). Эти вопросы естественным образом связаны с оценками производных от многочленов класса $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

В настоящей заметке устанавливаются экстремальные неравенства для производных от многочленов класса $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке длины 2ω , $0 < \omega < \pi$. Затем с помощью перехода к пределу при $\omega \rightarrow \pi$ выводится неравенство на отрезке длины 2π , а следовательно, на всей вещественной оси. Впрочем, при $\omega = \pi$ это неравенство представляет собой частный случай неравенства С. Н. Бериштейна для целых функций конечной степени.

Теорема 1. Если $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ и

$$|s(t)| \leq 1 \quad (-\omega \leq t \leq \omega, \quad 0 < \omega < \pi), \quad (2)$$

то

$$|s'(t)| \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}} \quad (-\omega < t < \omega), \quad (3)$$

причем равенство в (3) достигается только для многочленов

$$\gamma_{2n+1}(t) = \gamma \cos(2n+1) \arccos \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (-\omega \leq t \leq \omega), \quad (4)$$

$|\gamma| = 1$, в $2n+1$ точках t_k , являющихся нулями $\gamma_{2n+1}(t)$ на отрезке $[-\omega, \omega]$.

Эта теорема аналогична теореме об оценке производной обыкновенного тригонометрического многочлена целого порядка на отрезке, длина которого меньше, чем период. Доказательство основано на той же идее, что и в заметке [5].

Пусть $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$; сделаем подстановку $ax = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, где

$$a = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

тогда

$$s(t) = \frac{P_{2n+1}(x)}{V(1+a^2x^2)^{2n+1}}, \quad (5)$$

где $P_{2n+1}(x)$ — алгебраический многочлен степени $2n+1$. Заметим, что наша подстановка переводит отрезок $-\omega \leq t \leq \omega$ в отрезок $-1 \leq x \leq 1$. Если $s(t)$ удовлетворяет неравенству (2), то из (5) следует, что

$$|P_{2n+1}(x)| \leq V(1+a^2x^2)^{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (6)$$

Для того, чтобы применить общую схему оценки производных алгебраических многочленов, представим положительный многочлен $(1+a^2x^2)^{2n+1}$ в виде

$$(1+a^2x^2)^{2n+1} = M_{2n+1}^2(x) + (1-x^2)N_{2n}^2(x), \quad (7)$$

где $M_{2n+1}(x)$ и $N_{2n}(x)$ — алгебраические многочлены степени $2n+1$ и $2n$, все нули которых лежат в промежутке $(-1, 1)$ и взаимно разделены, причем $M_{2n+1}(1) > 0$, $N_{2n}(1) > 0$. Как известно, для любого положительного на $[-1, 1]$ многочлена такое представление возможно и притом единственно. Легко проверить (см. [5]), что в нашем случае эти многочлены определяются при $-1 \leq x \leq 1$ равенствами

$$\left. \begin{aligned} M_{2n+1}(x) &= \operatorname{Re}(\alpha x + i\sqrt{1-x^2})^{2n+1} \\ \sqrt{1-x^2}N_{2n}(x) &= \operatorname{Im}(\alpha x + i\sqrt{1-x^2})^{2n+1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\alpha = \sqrt{1+a^2}$. Таким образом, мы можем неравенство (6) переписать в виде

$$|P_{2n+1}(x)| \leq |M_{2n+1}(x) + i\sqrt{1-x^2}N_{2n}(x)| \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad (9)$$

где $M_{2n+1}(x)$ и $N_{2n}(x)$ определены посредством (8). Но, как доказано в работе [7], из (9) вытекает неравенство

$$|[\varphi(x) P_{2n+1}(x)]'| \leq |\{\varphi(x) [M_{2n+1}(x) + i \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x)]\}'|$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad (10)$$

для любой положительной и непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$ функции $\varphi(x)$. Для того, чтобы вывести из (10) неравенство (3), положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2x^2)^{2n+1}}}. \quad (11)$$

Если, кроме того, мы положим

$$\cos \theta = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \quad (12)$$

то из (8), (11) и (12) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) M_{2n+1}(x) &= \operatorname{Re} [e^{i(2n+1)\theta}] = \cos(2n+1) \arccos \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}} \\ \varphi(x) \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x) &= \operatorname{Im} [e^{i(2n+1)\theta}] = \sin(2n+1) \arccos \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отсюда, возвращаясь к исходной переменной t , мы можем при $-\omega \leq t \leq \omega$ написать

$$\left. \begin{aligned} \tau_{2n+1}(t) &= \varphi(x) M_{2n+1}(x) = \cos(2n+1) \arccos \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}, \\ \sigma_{2n+1}(t) &= \varphi(x) \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x) = \sin(2n+1) \arccos \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Замечая, что в силу (5) и (11), $s(t) = \varphi(x) P_{2n+1}(x)$ и что

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+a^2x^2},$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(x) P_{2n+1}(x)]' &= s'(t) \frac{2}{1+a^2x^2}, \\ [\varphi(x) M_{2n+1}(x)]' &= \tau'_{2n+1}(t) \frac{2}{1+a^2x^2}, \\ [\varphi(x) \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x)]' &= \sigma'_{2n+1}(t) \frac{2}{1+a^2x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10), получаем неравенство

$$|s'(t)| \leq |\tau'_{2n+1}(t) + i\sigma'_{2n+1}(t)| \quad (-\infty < t < \infty), \quad (16)$$

эквивалентное неравенству (3). Ясно, что в (16) равенство достигается для многочленов $\gamma\tau_{2n+1}(t)$, $|\gamma|=1$, в точках t_k ($k=1, 2, \dots, 2n+1$), в которых обращается в нуль $\sigma_{2n+1}(t)$. А в силу теоремы, доказанной в работе [7], равенство в (16) достигается только для этих многочленов и только в указанных точках. Остается лишь заметить, что нули $\sigma'_{2n+1}(t)$ совпадают с нулями $\tau_{2n+1}(t)$. Итак, теорема 1 доказана.

В качестве следствия из теоремы 1 выведем оценку для производной $s(t)$ на всей оси.

Следствие. Если $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ и

$$|s(t)| \leq 1 \quad (-\pi \leq t \leq \pi), \quad (17)$$

то

$$|s'(t)| \leq n + \frac{1}{2} \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (18)$$

причем равенство в (18) достигается только для многочленов $\gamma \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t + \beta \right]$, $|\gamma|=1$, β — любое вещественное число.

Зафиксируем точку t_0 , $-\pi < t_0 < \pi$, и выберем такое положительное число ω , что $|t_0| < \omega < \pi$. Из (17) вытекает, что на отрезке $[-\omega, \omega]$ имеет место неравенство (2); следовательно, в промежутке $(-\omega, \omega)$ и, в частности, в точке t_0 выполняется неравенство (3), то есть

$$|s'(t_0)| \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{t_0}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{t_0}{2}}}. \quad (19)$$

Устремляя теперь в правой части (19) параметр ω к π , в пределе получаем

$$|s'(t_0)| \leq n + \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Неравенство (20) установлено, таким образом, в каждой внутренней точке промежутка $(-\pi, \pi)$. Благодаря непрерывности $s'(t)$, неравенство (20) сохраняет силу и на концах промежутка в точках $\pm \pi$, то есть неравенство (20) справедливо на замкнутом отрезке $[-\pi, \pi]$. Из этого вытекает, что неравенство (20) выполняется на всей оси, так как всякий многочлен полуцелого порядка удовлетворяет условию

$$s(t) = (-1)^m s(t + 2\pi m) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21)$$

Итак, следствие доказано.

Как было уже отмечено вначале, неравенство (18) следует из общего неравенства С. Н. Бернштейна для производной от целой

функции конечной степени. В самом деле, из (21) мы заключаем, что неравенство (17), справедливое на отрезке длиной 2π , выполняется на всей вещественной оси; с другой стороны, ясно, что многочлены $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ являются целыми трансцендентными функциями конечной степени $\leq n + \frac{1}{2}$. Следовательно, по теореме С. Н. Бернштейна неравенство (17) влечет за собой неравенство (18).

Мы можем усилить теорему 1, если заменим предположение (2) более общим, а именно допустим, что многочлен $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству

$$|s(t)| \leq h(t) \quad (-\omega \leq t \leq \omega, 0 < \omega < \pi), \quad (22)$$

где $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$ и $h(t) > 0$ на отрезке $[-\omega, \omega]$. Докажем предварительно следующее утверждение.

Теорема 2. Если многочлен $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$ положителен на отрезке $[-\omega, \omega]$, $0 < \omega < \pi$, тогда при любом целом $n \geq l$ многочлен $h^2(t)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$h^2(t) = \mu^2(t) + \left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} \right] \nu^2(t), \quad (23)$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — многочлены класса $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$, имеющие в промежутке $(-\omega, \omega)$ соответственно $2n+1$ и $2n$ нулей, причем эти нули взаимно перемежаются, $\mu(\omega) > 0$, $\nu(\omega) > 0$.

Несколько более общая теорема для положительных тригонометрических многочленов целого порядка доказана в моем обзорном докладе [8]. Для того, чтобы установить равенство (23), мы применим снова подстановку $ax = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $a = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$. Это позволяет записать $h^2(t)$ в виде

$$h^2(t) = \frac{H_{2l+1}^2(x)}{(1+a^2x^2)^{2l+1}} = \frac{H_{2l+1}^2(x)(1+a^2x^2)^{2n-2l}}{(1+a^2x^2)^{2n+1}}, \quad (24)$$

где $H_{2l+1}(x)$ — алгебраический многочлен степени $2l+1$, положительный на отрезке $[-1, 1]$. Положительный на $[-1, 1]$ алгебраический многочлен степени $4n+2$, стоящий в числителе правой части (24), мы представляем в виде

$$H_{2l+1}^2(x)(1+a^2x^2)^{2n-2l} = M_{2n+1}^2(x) + (1-x^2)N_{2n}^2(x), \quad (25)$$

где $M_{2n+1}(x)$, $N_{2n}(x)$ — алгебраические многочлены степени $2n+1$ и $2n$, обладающие теми же свойствами, что и соответствующие многочлены в формуле (7). Возвращаясь к переменной t и полагая

$$\mu(t) = \frac{M_{2n+1}(x)}{V(1+a^2x^2)^{2n+1}}, \quad \nu(t) = \frac{N_{2n}(x)}{V(1+a^2x^2)^{2n+1}}, \quad (26)$$

мы непосредственно получаем формулу (23). Положим для краткости

$$\lambda(t) = \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \nu(t).$$

Учитывая (23), мы можем неравенство (22) переписать следующим образом

$$|s(t)| \leq |\mu(t) + i\lambda(t)| \quad (-\omega < t < \omega). \quad (27)$$

Теорема 3. Если многочлен $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству (27), то

$$|s'(t)| \leq |\mu'(t) + i\lambda'(t)| \quad (-\omega < t < \omega), \quad (28)$$

причем равенство в (28) достигается только для многочленов $\gamma\mu(t)$, $|\gamma|=1$, в $2n+1$ точках t_k , являющихся нулями функции $\lambda'(t)$ на отрезке $[-\omega, \omega]$.

Доказательство подобно доказательству теоремы 1. Оно также основано на неравенстве (10), где $\varphi(x)$ выбирается по формуле (11), а многочлены $M_{2n+1}(x)$ и $N_{2n}(x)$ определяются тождеством (25).

Если многочлен $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$ положителен на отрезке $[-\pi, \pi]$ и на этом отрезке имеет место неравенство (22), то вводя параметр ω , $0 < \omega < \pi$, а затем устремляя ω к π и рассуждая так же, как при выводе неравенства (18), из (28) получаем

$$|s'(t)| \leq |\mu'(t) + i\nu'(t)| \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (29)$$

Заметим, что неравенство (29) есть частный случай одной общей теоремы Н. И. Ахиезера [9] об ограничении производной целой функции конечной степени в предположении, что эта функция мажорируется на всей оси некоторой другой положительной целой функцией конечной степени.

В заключение формулируем теорему, которая даст точную оценку производной многочлена полуцелого порядка на всем отрезке $[-\omega, \omega]$.

Теорема 4. Если многочлен $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству (2), то при

$$n > \frac{1}{2} \left[3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

справедливо неравенство

$$|s'(t)| \leq \frac{1}{2} (2n+1)^2 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} = c_{2n+1}(\omega) \quad (-\omega \leq t \leq \omega), \quad (30)$$

причем равенство в (30) достигается только для многочленов $\gamma_{2n+1}(t)$, $|\gamma| = 1$, в точках $t = \pm \omega$.

Аналогичная теорема для многочленов целого порядка доказана в заметке [5]. Так как рассуждения при доказательстве теоремы 4 вполне сходны с приведенными в [5], то нет необходимости их здесь повторять.

Ленинградский электротехнический институт
связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Поступила 25 VI 1963

Վ. Ս. ՎԻԳԵՆՍԿԻ

ԿԻՍԱՍԲՈՂԶ ԿԱՐԳԻ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶՈՓԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են (1) տեսքի բաղմանդամներ, որոնք կոչվում են կիսամաքողջ կարգի եռանկյունաչափական բաղմանդամներ: Այդ բաղմանդամների դասը նշանակվում է $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$: Նրանց ածանցյալների համար սահմանվում են անհավասարություններ, որոնք համանման են սովորական եռանկյունաչափական բաղմանդամների համար հեղինակի կողմից [5] և [8] աշխատություններում ստացված անհավասարություններին: Ապացուցվում է, որ եթե բաղմանդամը $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ և տեղի է ունենում (2) անհավասարությունը, ապա զրանից հետևում են (3) և (30) անհավասարությունները: Ավելի ընդհանուր անհավասարություն, քան (3)-ը, ստացվում է այն ենթադրությամբ, որ $s(t)$ -ն բախարարում է (22) պայմանին, որտեղ $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$, $h(t) > 0$, երբ $-\omega \leq t \leq \omega$, $0 < \omega < \pi$: Այդ նպատակով ապացուցվում է, որ ցանկացած $n \geq l$ ամբողջի դեպքում $h^2(t)$ բաղմանդամը կարող է ներկայացվել (23) տեսքով, որտեղ $v(t)$ և $\lambda(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ դասի բաղմանդամներ են, որոնք $(-\omega, \omega)$ միջակայքում ունեն համապատասխանաբար $2n+1$ և $2n$ պարզ արմատներ, ընդ որում այդ արմատները փոխադարձաբար ընդմիջվում են, այսինքն՝ մի բաղմանդամի հարևան արմատների լուրջքանջուր դուրդի միջև ընկնում է մյուս բաղմանդամի ճիշտ մեկ արմատ: Շնորհիվ (23) բանաձևի, (22) անհավասարությունը կարելի է արտազրել (27) տեսքով: Ապացուցվում է, որ (27)-ից բխում է (28) անհավասարությունը:

(3) $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ නන්ද්‍රව්‍යයන්ගේ (28) $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$ ධ්‍රැවණ-
 උපරිතයන්හි සමානතාවයන්, හරි පරිමාණයන්හි සමානතාවයන්
 හි සමානතාවයන්.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турецкий А. Х. О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов. Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина, серия физ.-мат. наук, вып. 1 (49), 1959, 31—54.
2. Турецкий А. Х. Об оценке приближений в среднем непрерывных периодических функций тригонометрическими интерполяционными полиномами. Докл. АН УзССР, № 4, 1959, 7—11.
3. Пулатов А. И. Некоторые вопросы тригонометрических многочленов, ортогональных с весом. Известия АН УзССР, серия физ.-матем. наук, № 4, 1960, 25—29.
4. Пулатов А. И. О разложении функций в ряд по тригонометрическим многочленам полуполого порядка. Известия АН УзССР, серия физ.-матем. наук, № 6, 1960, 34—44.
5. Виденский В. С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем, чем период. ДАН, 130, № 1, 1960, 13—16.
6. Бернштейн С. Н. Об одном классе ортогональных многочленов. Сочинения, том 1, статья № 42; М., 1952.
7. Виденский В. С. Некоторые оценки производных от рациональных дробей. Известия АН СССР, серия матем., 26, 1962, 415—426.
8. Виденский В. С. Экстремальные оценки производных полинома на отрезке. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций (сборник статей под ред. В. И. Смирнова). М., 1961; стр. 98—106.
9. Ахиезер Н. И. О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа. Известия АН СССР, серия матем., 10, 1946, 411—428.