

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. М. Айвазян

Излучение при пролете линейного источника над двумя идеально проводящими параллельными полуплоскостями

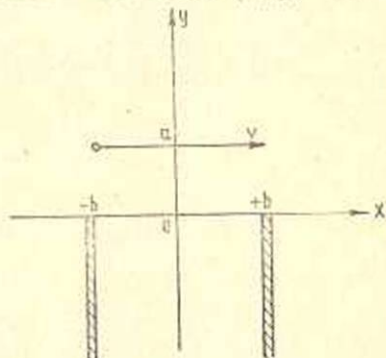
Задача о возбуждении двух параллельных идеально проводящих полуплоскостей равномерно движущейся заряженной нитью относится к типу задач, которые можно точно решить методом Винера-Хопфа.

Пусть нить с линейной плотностью заряда q , параллельная оси z движется в вакууме в положительном направлении оси x со скоростью v на расстоянии a от краев двух идеально проводящих параллельных полуплоскостей ($x = \pm b, y < 0$) (фиг. 1). В этом случае $\vec{H}$ имеет только H_z компоненту, а $\vec{E}$ и $\vec{k}$ лежат в плоскости (x, y) . Вектор Герца $\vec{\Pi}$ имеет только компоненту

Π_x . Полный вектор Герца $\vec{\Pi}_1$ ищем в виде

$$\vec{\Pi}_1 = \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}, \quad (1)$$

где $\vec{\Pi}_0$ описывает поле нити, а $\vec{\Pi}$ описывает поле излучения, которое и будет нас интересовать. Потенциалы поля выражаются через вектор Герца следующим образом:



Фиг. 1.

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \quad \varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}, \quad (2)$$

а поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выражаются через потенциалы поля по обычным формулам. Вектор Герца Π_0 равен

$$\Pi_0 = \int \Pi_0(k, \omega) e^{-i \frac{\omega}{v}(x-vt) - ik|y-a|} dk d\omega, \quad (3)$$

где

$$\Pi_0(k, \omega) = \frac{i q}{\pi} \frac{1}{\omega [k^2 + \kappa^2]},$$

$$x^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Вектор Герца Π ищем в виде

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int \Pi(k, \omega, x) e^{-ikx + i\omega t} dk d\omega. \quad (4)$$

Величина $\Pi(k, \omega, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2 \right) \Pi(k, \omega, x) = 0, \quad (5)$$

$$\gamma^2 = k^2 - \alpha^2 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\omega}{c} + i\delta, \quad \delta > 0.$$

Решения уравнения (5), удовлетворяющие условию исчезновения на бесконечности и непрерывности $\Pi' \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial x}$ при $x = \pm b$ имеют вид

$$\Pi(k, \omega, x) = \begin{cases} (A - Be^{2\gamma b}) e^{-\gamma x} & \text{при } x \geq b \\ Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} & \text{при } |x| \leq b \\ (-Ae^{2\gamma b} + B) e^{\gamma x} & \text{при } x \leq -b, \end{cases} \quad (6)$$

где A и B — функции k . При этом выбирается ветвь γ такая, что $\operatorname{Re} \gamma > 0$ при $|\operatorname{Im} k| < \delta$.

Введем теперь обозначения

$$\Pi(k, \omega, x) = \Pi_+ + \Pi_-, \quad (7)$$

$$\Pi_{\pm}(k, \omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Pi(x, \pm y, t) e^{-iky - i\omega t} dy dt. \quad (8)$$

При этом $k\Pi_+$ регулярна по k в области $\operatorname{Im} k > -\delta$, а $k\Pi_-$ регулярна в области $\operatorname{Im} k < \delta$. Введем обозначения $\Pi_{\pm}(k, \omega, x \pm 0) \equiv \Pi_{\pm}(x \pm 0)$. Под $\Pi_{\pm}(x \pm 0)$ понимаются пределы справа и слева. Из (7) и (6) получим следующие соотношения:

$$\Pi_+(b+0) + \Pi_-(b+0) = Ae^{-\gamma b} - Be^{\gamma b}, \quad (9)$$

$$\Pi_+(b-0) + \Pi_-(b-0) = Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}, \quad (10)$$

$$\Pi_+(-b+0) + \Pi_-(-b+0) = Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}, \quad (11)$$

$$\Pi_+(-b-0) + \Pi_-(-b-0) = -Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}. \quad (12)$$

Из условий непрерывности Π при $y > 0$ имеем

$$\Pi_+(b+0) = \Pi_+(b-0), \quad (13)$$

$$\Pi_+(-b+0) = \Pi_+(-b-0). \quad (14)$$

Из условий непрерывности $\Pi' \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial x}$ имеем еще следующие соотношения:

$$\Pi'_+(b) + \Pi'_-(b) = \gamma (-Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}), \quad (15)$$

$$\Pi'_+(-b) + \Pi'_-(-b) = \gamma (-Ae^{\gamma b} + Be^{-\gamma b}); \quad (16)$$

из граничных условий $E_y(\pm b, y < 0) = 0$ получим

$$\Pi'_+(\pm b) = \frac{q}{v} e^{-\alpha x \mp i \frac{\omega}{2} b} \frac{1}{k(k - ix)}. \quad (17)$$

Положим

$$\Pi'_+(b) + \Pi'_+(-b) = P_+, \quad (18)$$

$$\Pi'_+(b) - \Pi'_+(-b) = Q_+,$$

$$\Pi_-(\pm b + 0) - \Pi_-(\pm b - 0) = \pm 2\Phi_-(\pm b), \quad (19)$$

где

$$\Phi_-(b) = -Be^{\gamma b}, \quad \Phi_-(-b) = -Ae^{\gamma b}. \quad (20)$$

Положим еще

$$\Phi_-(b) - \Phi_-(-b) = Q_-, \quad (21)$$

$$\Phi_-(b) + \Phi_-(-b) = P_-.$$

Образум сумму и разность равенств (19) и то же самое сделаем с равенствами (15) и (16). Используем обозначения (21) и (18). Из полученных соотношений исключим $A + B$ и $A - B$. Получим

$$P'_+ + \frac{2q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{2} b e^{-\alpha x}}{k(k - ix)} = -\gamma (1 + e^{-2\gamma b}) Q_-, \quad (22)$$

$$Q'_+ - \frac{2iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{2} b e^{-\alpha x}}{k(k - ix)} = -\gamma (1 - e^{-2\gamma b}) P_-. \quad (23)$$

К этим уравнениям можно применить стандартный метод Винера-Хопфа. Используем известные факторизации [1]

$$\frac{1}{2} (1 + e^{-2\gamma b}) = M(k) = M_+(k) M_-(k), \quad (24)$$

$$\frac{1}{2\gamma b} (1 - e^{-2\gamma b}) = L(k) = L_+(k) L_-(k), \quad (25)$$

где функции $M_+(k)$ и $L_+(k)$ регулярны при $\text{Im } k > -\gamma$, а функции $M_-(k)$ и $L_-(k)$ регулярны при $\text{Im } k < \gamma$.

Явный вид этих функций такой

$$L_{\pm}(k) = \exp [\mp \Psi_{\pm}(k) - R_{\pm}(k)] \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - \alpha^2 b_n^2)^{1/2} \mp ikb_n] e^{\pm ikb_n}, \quad (26)$$

$$M_{\pm}(k) = \exp [\pm \Psi_1(k) - R_{\pm}(k)] \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha^2 b_n^2)^{\pm 1/2} \mp i k b_{n-1/2} e^{\pm i k b_{n-1/2}}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(k) &= -\frac{ibk}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{\pi}{2b\alpha} \right) \right] + \frac{1}{2} kb, \\ \Psi_2(k) &= -\frac{ibk}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{b\alpha} \right) \right] + \frac{1}{2} kb, \\ b_n &= \frac{b}{n\pi}, \quad b_{n-1/2} = \frac{b}{(n-1/2)\pi}, \\ \exp(-\gamma b) &= \exp[-R_+(k)] \exp[-R_-(k)], \\ R_+(k) &= \frac{b\gamma}{\pi} \arccos \frac{k}{\alpha}, \quad R_-(k) = R_+(-k). \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом этих факторизаций преобразуем уравнения (22) и (23) к виду

$$\begin{aligned} \frac{kP'_+}{(\alpha+k)^{1/2} M_+(k)} + \frac{2q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{k-ix} \left(\frac{1}{(\alpha+k)^{1/2} M_+(k)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(\alpha+ix)^{1/2} M_+(ix)} \right) = -2M_-(k) (\alpha-k)^{1/2} kQ_- - \frac{2q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(\alpha+ix)^{1/2} M_+(ix)}, \\ \frac{kQ'_+}{(k+\alpha) L_+(k)} - \frac{2iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{k-ix} \left(\frac{1}{(k+\alpha) L_+(k)} - \frac{1}{(ix+\alpha) L_+(ix)} \right) = \\ = -2bk(k-\alpha) L_-(k) P_- + \frac{2iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(ix+\alpha) L_+(ix)}. \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений регулярны при $\text{Im } k < \delta$, а левые при $\text{Im } k > -\delta$. Совершая аналитическое продолжение и применяя теорему Лиувилля, находим из этих уравнений

$$kQ_- = -\frac{q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(\alpha+ix)^{1/2} (\alpha-k)^{1/2} M_+(ix) M_-(k)}, \quad (29)$$

$$kP_- = \frac{iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{b(k-ix)(k-\alpha)(ix+\alpha) L_+(ix) L_-(k)}. \quad (30)$$

Для вектора Герца теперь легко найдем следующие выражения:

$$P = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} (P_- \operatorname{ch} \gamma x + Q_- \operatorname{sh} \gamma x) e^{-\gamma b - iky + i\omega t} dk d\omega \quad (31)$$

при $|x| \leq b$ и

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} (P_- \operatorname{sh} \gamma b \pm Q_- \operatorname{ch} \gamma b) e^{-\gamma|x| - iky + i\omega t} dk d\omega, \quad (32)$$

где верхний знак берется для $x \geq b$, а нижний для $x \leq -b$, $|\tau| < \delta$.

Магнитное поле при $|x| \leq b$, $y < 0$ имеет следующий вид:

$$H_z = -\frac{1}{2\pi c} \int k\omega (P_- \operatorname{ch} \gamma x + Q_- \operatorname{sh} \gamma x) e^{-\gamma b - iky + i\omega t} dk d\omega. \quad (33)$$

В этом случае подинтегральное выражение не имеет точки ветвления в верхней полуплоскости комплексного переменного k . Поэтому контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости и поле H_z будет определяться особенностями подинтегрального выражения в верхней полуплоскости комплексного переменного k .

При этом вычет в полюсе $k = ix$ дает падающую волну H_z^0 , но с обратным знаком. Вычет в точке $k = \alpha$ в P_- дает основную распространяющуюся в волноводе волну типа ТЕМ. Кроме этих полюсов есть

еще полюса в P_- при $\operatorname{sh} \gamma b = 0$, то есть в точках $k_{2m} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 (2m)^2}{4b^2}}$

и в Q_- при $\operatorname{ch} \gamma b = 0$ в точках $k_{2m+1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 (2m+1)^2}{4b^2}}$. Эти полю-

са дают собственные волноводные волны. Беря все вычеты, находим, что поле между пластинами имеет вид

$$\begin{aligned} H_z = & \frac{qv}{cb} \int \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x - i \frac{\omega}{c} y + i\omega t}}{\omega L_+ (ix) L_- \left(\frac{\omega}{c} \right)} d\omega + \\ & + \frac{q}{c v b} \sum_m \int \frac{(-1)^m \omega \sin \frac{\omega}{v} b L_+ (k_{2m}) \gamma_{2m}^2 \operatorname{ch} (\gamma_{2m} x)}{(k_{2m} - ix) \left(k_{2m} - \frac{\omega}{c} \right) \left(ix + \frac{\omega}{c} \right) L_+ (ix) k_{2m}} \times \\ & \times e^{-\alpha x - i k_{2m} y + i\omega t} d\omega + \\ & + \frac{i q}{c v} \sum_m \int \frac{(-1)^m \omega \cos \frac{\omega}{v} b M_+ (k_{2m+1}) \operatorname{sh} (\gamma_{2m+1} x) \gamma_{2m+1}}{(k_{2m+1} - ix) \left(\frac{\omega}{c} + ix \right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{c} - k_{2m+1} \right)^{1/2} M_+ (ix) k_{2m+1}} \times \\ & \times e^{-\alpha x - i k_{2m+1} y + i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (34)$$

Интересно отметить, что в волне ТЕМ нет частот, для которых

$\sin \frac{\omega}{v} b = 0$, то есть $\omega = \frac{v\pi m}{b}$. В выражениях для других волн тоже есть аналогичные множители. Обращение волны TEM в нуль при $\omega = \frac{v\pi m}{b}$ имеет простой физический смысл. Если время прохождения источника между пластинами равно или кратно периоду волны, то такая волна TEM не возбуждается. Аналогичный результат получился и в работе [1], в которой рассматривалось возбуждение заряженной нитью бесконечной системы равноотстоящих параллельных идеально проводящих полуплоскостей.

Поток вектора Пойтинга в волноводе можно получить по формуле

$$W_{\omega} = c \int_{-b}^b F_{x, \omega} H_{z, -\omega} dx, \quad (35)$$

где $H = \int H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. При этом нужно суммировать только по тем m , для которых k_{2m} и k_{2m+1} вещественны.

Поле вне волновода на больших расстояниях можно получить интегрированием по методу перевала. При этом при $b \rightarrow 0$ результаты, очевидно, переходят в результаты работы [3], где рассматривалась дифракция поля заряженной нити на одной идеально проводящей полуплоскости.

ЦНИ Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 14 XII 1963

Յու. Մ. Այվազյան

ԳԾԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻ ԶԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ԻԴԵԱԼԱՊԵՍ ՀԱՂՈՐԴՈՂ
ԶՈՒԳԱԶԵՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱՅՈՎ ԹՈՒՋԹԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է հարթ կիսամանրիկի ալիքատարի դր-դատմը համասարաչափ շարժվող լիցքավորված թելի կողմից:

Ապացուցված է, որ դաշտը ալիքատարի մեջ բաղկացած է հիմնական ալիքից և ալիքատարի սեփական ալիքներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. И. Л., М., 1962.
2. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение линейного источника, протекающего вблизи дифракционной решетки, образованной системой идеально проводящих полуплоскостей. ЖТФ, 34, вып. 4. 1964 704.
3. Седракиан Д. М. Излучение заряженной нити, движущейся параллельно краю бесконечно проводящего экрана. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, 3, 1963, 115.