

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

О законе движения ударной волны в жидкости

Рассмотрим задачу проникания давления $P_A(t)$, движущегося по поверхности жидкого полупространства со скоростью $R'(t)$, в глубь него. Рассмотрим осесимметричную задачу. Уравнение политропы для жидкости возьмем в виде $P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]$, где P — давление, ρ — плотность, B, n — постоянные.

Выберем оси Or_0 и Oz в плоскости поверхности жидкости и по нормали к ней, точка O соответствует началу распространения давления на поверхности.

Будем искать решение вблизи ударной волны, соответствующей области влияния начальной точки O — области дифракции. Сначала рассмотрим движение по оси симметрии Oz .

Решение линейной задачи дается в виде [3]

$$P = -P_A \left(t - \frac{z}{a} \right) + P_A(t') \frac{z + R(t') R'(t')}{a(t - t')}, \quad (1)$$

где P — давление, a — начальная скорость звука жидкости, t — время, $R(t)$ — координата фронта давления на поверхности, а для t' имеем уравнение

$$\sqrt{a^2(t - t')^2 - z^2} = R(t').$$

Пусть давление на границе $P_A(t)$ резко падает со временем и в некоторый малый момент $t = t_0$ обращается в нуль. Тогда область возмущенного движения в области дифракции будет ограничена узкой прифронтовой областью, то есть будет [2] короткой волной.

Найдем давление на ударной волне для больших t . Запишем линейное решение (1) на уточненных характеристиках

$$t = \frac{z}{a} - \frac{1}{a} \frac{n+1}{2} \int_{ay}^z \frac{P}{Bn} dz + y, \quad (2)$$

$$P = -P_A(y) + P_A(t') \frac{z + R(t') R'(t')}{a(t - t')}, \quad (3)$$

где в выражении t' нужно заменить $t - \frac{z}{a} \rightarrow y$, $y = \text{const}$ вдоль характеристик (2).

Для больших z из (3) имеем

$$P = \frac{y P_1(y) \frac{R''(y)}{a}}{z}. \quad (4)$$

Если подставить (4) в (2) и написать соотношение для скорости ударной волны, легко определить y вдоль ударной волны [1]

$$P_A^2(y) y^2 \int_{ay}^z \frac{R''(y)}{a} \frac{1}{Bn} \frac{dz}{z} = \frac{4}{n+1} \int_0^y P_A(y) y dy. \quad (5)$$

Из граничных условий $P_A(y_0) = 0$, и, следовательно, имеет место эффект нелинейного затухания. Здесь обозначено $y_0 = t_0$.

Для больших z из (5) имеем $y \rightarrow y_0$ и

$$P_A(y) y = \sqrt{\frac{\frac{4}{n+1} a^2 \int_0^{y_0} P_A(y) y dy}{R''(y) \frac{1}{Bn} \ln \frac{z}{ay_0}}}. \quad (6)$$

Из (4) найдем

$$P = \frac{R'(y)}{a} \frac{1}{z} \sqrt{\frac{\frac{4}{n+1} \int_0^{y_0} P_A(y) y dy}{\frac{1}{Bn} \ln \frac{z}{ay_0}}}. \quad (7)$$

В случае, когда давление на границе задано в виде $P_A(t) = P_A(0) + P'_A(0)t$, имеем $y_0 = -\frac{P_A(0)}{P'_A(0)}$.

Для всей части ударной волны, ограничивающей область влияния точки 0, можно получить соотношение, подобное (7).

Пусть мы имеем для граничного давления $P_A(t)$ падение со временем до нулевого значения $P_A(t_0) = 0$, где t_0 — некоторое число, или $P_A(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Здесь уже нет эффекта короткой волны, но есть N -волна [1].

В линейном случае имеем для давления в области дифракции

$$P = \frac{1}{a} \frac{1}{2z} \frac{\partial}{\partial t'} P_1(t') R^2(t'), \quad (8)$$

где $t' = t - \frac{z}{a}$.

Снова заменим характеристики линейной задачи уточненными

$$t = \frac{z}{a} - \frac{n+1}{2} \frac{1}{aBn} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{P_1(y') R^2(y')}{2a} \ln \frac{z}{ay} + y. \quad (9)$$

Обозначим

$$\beta(z) = \frac{1}{aBn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{z}{ay}, \quad (10)$$

$$F(y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_1(y) R^2(y)}{2a}.$$

Из соотношения на ударном фронте найдем для y [1]

$$\beta(z) = \frac{2 \int_0^y F(y) dy}{F^2(y)}$$

$$F(y) = \sqrt{\frac{2a \int_0^{y_0} F(y) dy}{\frac{n+1}{2} \frac{1}{Bn} \ln \frac{z}{ay_0}}}, \quad (11)$$

поскольку при $z \rightarrow \infty$ имеем $F(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow y_0$. В самом деле, пусть $P(t_0) = 0$ или $P(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $R(t_0)$ конечно. Тогда по теореме Ролля будет нуль $F(y_0) = 0$, причем $0 < y_0 < t_0$.

Уравнение ударного фронта найдется из (10) и (11) в виде

$$t = \frac{z}{a} - \sqrt{\beta(z)} \sqrt{2 \int_0^{y_0} F(y) dy} + y_0.$$

Для давления на фронте найдем

$$\rho = \frac{F(y)}{z} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{2 \int_0^{y_0} F(y) dy}{\beta(z)}}. \quad (12)$$

Предельная характеристика найдется из (10)

$$t = \frac{z}{a} + y_0.$$

Найдем еще условие образования заднего скачка, как огибающей характеристик (10)

$$t = \frac{z}{a} - (z) F(y) + y, \\ \beta(z) F'(y) = 1.$$

Задний скачок образуется, если $F'(y) > 0$. Легко показать, что при заданных граничных значениях $P(y)$ и $R(y)$ условие $F'(y) > 0$ выполняется и имеется задний скачок, в котором давление повышается до невозмущенного.

Отметим, что для граничного давления в виде

$$P_A(t)f\left(\frac{r}{R}\right)$$

предыдущее решение меняется незначительно. В частности, в формуле (7) вместо P_A нужно писать $2P_A \int_0^1 \zeta f(\zeta) d\zeta$.

Теперь рассмотрим всю область влияния начальной точки.

В линейном случае имеем для давления в области дифракции

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} \frac{P_A(t') r dr}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2}}, \quad (13)$$

где

$$r_0^* = R \left(t - \frac{1}{a} \sqrt{r_0^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2} \right),$$

$$t' = t - \frac{1}{a} \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2}.$$

Для больших $r_1 = \sqrt{r_0^2 + z^2}$, если ввести полярные координаты $r_0 = r_1 \cos \theta$, $z = r_1 \sin \theta$, получим

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r dr P_1 \left(t - \frac{1}{a} r_1 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right), \quad (14)$$

то есть тот же эффект, что и для сосредоточенной силы.

Решение (14) можно переписать в виде

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r dr P_1 \left(t - \frac{1}{a} r_1 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right), \quad (15)$$

где учтено, что в принятом приближении (для больших r_1)

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\sin \theta}{a}; \quad t' = t - \frac{1}{a} r_1.$$

Заменяем характеристики линейной задачи уточненными; пусть $t - \frac{r_1}{a} = y$. Тогда получим

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\dot{r}_0} P_1 \left(y + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr, \quad (16)$$

где

$$\dot{r}_0 = R \left(y + \frac{1}{a} \dot{r}_0 \cos \theta \cos \psi \right),$$

и уравнение характеристик

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{1}{a B n} \frac{n+1}{2} F(y) \ln \frac{r_1}{ay} + y, \quad (17)$$

где

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\dot{r}_0} P_1 \left(y + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr.$$

Заметим, что уравнение характеристик, вообще говоря, дается соотношением

$$1 - v_{r_1} \frac{\partial t}{\partial r_1} - v_\theta \frac{\partial t}{r_1 \partial \theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{r_1 \partial \theta} \right)^2} a \left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{P}{B n} \right). \quad (18)$$

Здесь v_{r_1} , v_θ — радиальная и тангенциальная проекции вектора скорости.

Из (14) следует, что $v_{r_1} = O\left(\frac{1}{r_1}\right)$, $v_\theta = O\left(\frac{1}{r_1^2}\right)$. Тогда, учитывая, что $t = \frac{r_1}{a} + O(\ln r_1)$, и оставляя в (18) малые порядка $\frac{1}{r_1}$, найдем, что производные по θ не понадобятся и уравнение характеристик дается (17).

Соотношение на ударном фронте дает для y

$$\frac{1}{a B n} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r_1}{ay} = \frac{2 \frac{\cos \theta}{a} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\dot{r}_0} P_1 \left(y + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr}{F^2(y)} \quad (19)$$

или

$$F(y) = \frac{\sqrt{\frac{\cos \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\dot{r}_0} P_1 \left(y_0 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr}}{\sqrt{\frac{1}{B n} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r_0}{ay_0}}}, \quad (20)$$

где y_0 находится, как и прежде, из соотношения $F(y_0) = 0$ и по теореме Роля существует для граничных давлений заданного типа, $0 < y_0 < t_0$.

Для давления на ударной волне получим

$$P = \frac{1}{r_1} F(y) = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\cos \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0} P_1 \left(y_0 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr}}{\sqrt{\frac{1}{Bn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r_1}{ay_0}}}.$$

Рассмотрим теперь решение в окрестности точки $\cos \theta = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$ для постоянной скорости $R'(t) = V$. Давление в линейной постановке дается (13).

Пусть $P_A = \text{const}$, что несущественно. Тогда для точек, близких к фронту, $t - \frac{1}{a} \sqrt{r_0^2 + z^2}$ мало и можно найти

$$P = \frac{1}{\pi} P_1 \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \times \\ \times \int_0^{\pi} \frac{at}{M} - r_0 \cos \psi - \sqrt{\left(\frac{at}{M} - r_0 \cos \psi \right)^2 - (a^2 t^2 - r_0^2 - z^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)} \\ \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \sqrt{\left(\frac{at}{M} - r_0 \cos \psi \right)^2 - (a^2 t^2 - r_0^2 - z^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)} d\psi.$$

Поскольку $t - \frac{r_1}{a} = y$, $r_0 = r_1 \cos \theta$, $z = r_1 \sin \theta$, имеем

$$P = \frac{1}{\pi} P_1 \frac{1}{r_1} \int_0^{\pi} \frac{f_1(\psi) - \sqrt{f_1^2(\psi) - (a^2 t^2 - r_1^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}}{\left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \sqrt{f_1^2(\psi) - (a^2 t^2 - r_1^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}} d\psi,$$

где

$$f_1(\psi) = \frac{r_1}{M} - r_1 \cos \theta \cos \psi + \frac{ay}{M}.$$

Найдем решение на луче $\cos \theta = \frac{1}{M}$. Тогда отбрасывая малые высшего порядка, имеем

$$P = \frac{1}{\pi} P_1 \frac{1}{r_1} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\psi) + \frac{ay}{M} - \sqrt{f_2^2(\psi) - ya2r_1 \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}}{\left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \sqrt{f_2^2(\psi) - ya2r_1 \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}} d\psi, \quad (21)$$

где

$$f_2(\psi) = 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} r_1 \cos \theta.$$

В выражении (21) особенность появляется вблизи точки $\psi = 0$, причем легко видеть, что $\sin^2 \frac{\psi}{2} \sim y$. С учетом этого сделаем замену

$$\frac{\psi}{2} = \varphi, \quad \sin^2 \varphi = \frac{ay \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2r_1 \cos^2 \theta} t = y_1 t. \quad \text{Тогда, если отбросить малые высшего порядка, нетрудно найти выражение для давления вблизи точки} \quad r_0 = \frac{at}{M}$$

$$P = K \sqrt[4]{y_1} = \frac{1}{2\pi} P_1 \sqrt[4]{y_1} \sin \theta \times \\ \times \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{-\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1}} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{1 - Vy_1 t}} dt. \quad (22)$$

Покажем, что в интеграле можно считать $y_1 = 0$.

Представим его в виде

$$\int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{-\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1}} t^{-\frac{3}{4}} dt + \\ + \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1} (\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} \frac{t^{-\frac{3}{4}} \sqrt{y_1 t} dt}{A(1+A)}, \quad (23) \\ A = \sqrt{1 - Vy_1 t}.$$

Множитель $1 - \frac{1}{M^2}$ не влияет на дальнейшее доказательство и будет отброшен. Второй из интегралов записывается в виде

$$\sqrt{y_1} \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\sqrt{t+1} (\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} t^{-\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{t}}{A(1+A)} dt + \\ + \sqrt{y_1} \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\sqrt{t+1} (\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} t^{-\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{t}}{A(1+A)} dt.$$

В этом выражении достаточно показать, что второй интеграл стремится к нулю при $y_1 \rightarrow 0$.

Произведем оценку

$$\begin{aligned} V y_1 \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{V t + 1 (V t + 1 + V t)} t^{-\frac{3}{4}} \frac{V t}{A(1+A)} dt &\leq \\ &\leq V y_1 \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{V t}{t^{\frac{3}{4}} V 1 - V y_1 t} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену $V y_1 t = 1 - x$, $dt = -\frac{2(1-x)dx}{y_1}$. Интеграл переписывается так

$$\begin{aligned} V y_1 \int_{1-V y_1}^0 \frac{y_1^{\frac{5}{4}}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \frac{-2dx}{y_1 V x} &= \\ = V y_1 \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-2dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} V x} y_1^{\frac{1}{4}} + V y_1 \int_{1-V y_1}^{\frac{1}{2}} \frac{-2dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} V x} y_1^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Здесь опять достаточно исследовать второй интеграл

$$\begin{aligned} \left| V y_1 \int_{1-V y_1}^{\frac{1}{2}} \frac{y_1^{\frac{1}{4}} 2dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} V x} \right| &\leq V y_1 \left| \int_{1-V y_1}^{\frac{1}{2}} \frac{4y_1^{\frac{1}{4}} dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \right| = \\ &= V y_1 \left(8 - \frac{8y_1^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что второй из интегралов (23) стремится к нулю при $y_1 \rightarrow 0$.

Итак, для давления на уточненных характеристиках $t - \frac{r_1}{a} \rightarrow y_1$ получим при $\cos \theta = \frac{1}{M}$

$$P = K \sqrt[4]{y_1}, \quad (24)$$

где

$$K = \frac{1}{2\pi} P_1 \sin \theta \int_0^{\infty} \frac{V t - V t + 1}{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) V t + 1} t^{-\frac{3}{4}} dt, \quad (25)$$

$$y_1 = \frac{ay \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2r_1 \cos^2 \theta}.$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{n+1}{2} \frac{K}{Bn} \sqrt[4]{\frac{ay \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2 \cos^2 \theta}} \frac{1}{a} \frac{4}{3} r_1^{\frac{3}{4}} + y. \quad (26)$$

Из соотношений на ударной волне получим

$$\frac{1}{a} \frac{n+1}{2} \frac{K}{Bn} \frac{4}{3} r_1^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\frac{a \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2 \cos^2 \theta}} = \frac{y^{\frac{5}{4}} \frac{8}{5}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{5} y^{\frac{3}{4}}. \quad (27)$$

Из (24) и (27) найдем для давления на ударной волне при $\cos \theta = \frac{1}{M}$

$$P = K \left(\frac{n+1}{2} \frac{K}{Bn} \frac{5}{6} \sqrt[4]{\frac{1 - \frac{1}{M^2}}{2 \cos^2 \theta}} a \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\frac{a \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2 \cos^2 \theta}},$$

причем уравнение ударной линии в виде

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{3}{5} y.$$

Таким образом, в отличие от остальной части ударной волны в области дифракции, где давление имеет экспоненциальный порядок малости, вблизи точки $\cos \theta = \frac{1}{M}$ давление будет малой величиной

порядка $\left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{5}}.$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 XII 1963

Բաղդուկ Ս. Գ.

ՇԵՂՈՒԿՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հաղթածում դիտարկվում է հեղուկների թափանցած հարվածային ալիքի
հարվածան խնդիրը ժամանակի մեծ մոմենտների համար: Գծաչնացված խա-

րակտերիստիկները հշգրիտներով փոխարինելու օգնությամբ որոշվում է հար-
վածակին ալիքի մարման օրինաչափությունը: Եզակի կետի շրջակայքում
ստացված է ոչ-զգալի խնդրի լուծումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Whitam G. B. The propagation of Weak Spherical Shocs in Star. Communications on pure and applied Mathematics, Volume VI, 1953.
2. Губкин К. Г. Образование разрывов в звуковых волнах. ПММ, № 4, 1958.
3. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.