

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков

Нелинейные акустические колебания
цилиндрической оболочки

Задача о вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек, вызванных пульсациями акустического давления, уже рассматривалась в литературе. Наибольший интерес представляет исследование в нелинейной постановке колебаний круговых цилиндрических панелей, закрепленных по контуру и находящихся в акустическом поле. Этому вопросу посвящены работы Кирхмана и Гринспона [1], Лэсситера, Хесса и Хаббарда [2], Лина [3] и других; см. обзорную статью Гудмана и Ратгайи [4]. В работах В. В. Болотина [5], М. Ф. Диментберга [6] и других авторов эта проблема рассматривается в статистической постановке.

В настоящем сообщении исследуются собственные и акустические вынужденные нелинейные колебания круговых цилиндрических панелей, имеющих "идеальную" форму, а также с учетом начальных неправильностей в форме срединной поверхности. Используется метод определения амплитудно-частотных характеристик, предложенный Э. И. Григолюком [7]; проведено сравнение с данными, полученными другим путем Г. В. Мишенковым [8].

§ 1. Рассмотрим колебания круговой цилиндрической панели, находящейся под воздействием сжимающих усилий p вдоль образующей и акустического равномерного нормального давления $q(t) = q_a \cos \omega t$. Для определения амплитуды давления q_a можно воспользоваться известной формулой $N = 20 \lg(q_e/q_0)$; N — уровень шума в децибелах, q_0 — условный порог давления $q_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Н/м}^2$, q_e — эффективная величина звукового давления. Отсюда находим

$$q_a = \sqrt{2} q_e = 2^{1.5} \cdot 10^{5(0.01N-1)} \text{ Н/м}^2 \approx 2^{1.5} \cdot 10^{5(0.01N-2)} \text{ кг/см}^2.$$

Исходные уравнения теории гибких пологих оболочек примем, как обычно, в виде [9]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = L(w + w_0, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q(x, y, t)}{h}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w + 2w_0, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Здесь w и w_0 — соответственно дополнительный и начальный прогибы

панели, h — толщина, R — радиус кривизны срединной поверхности, Φ — функция напряжений в срединной поверхности, L — оператор, который в применении к функциям $(w + w_0)$, Φ будет

$$L(w + w_0, \Phi) = \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \\ + \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

координаты x и y откладываются вдоль образующей и по дуге. Нормальная нагрузка $q(x, y, t)$ для панели, совершающей колебания, равна

$$q(x, y, t) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + q_a \cos \omega t, \quad (3)$$

где ε — коэффициент затухания.

Примем края панели шарнирно опертыми. Аппроксимируем w и w_0 выражениями

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение совместности деформаций (2), определяем функцию Φ . Удовлетворяя, далее, уравнению (1) по методу Бубнова-Галеркина, получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее в первом приближении нелинейные акустические колебания панели

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \frac{2\varepsilon}{\omega} \frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{p^*}{p_u^*}\right) (\alpha \zeta - \beta \zeta^2 + \gamma \zeta^3) = \zeta_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{p^*}{p_u^*} + \frac{16}{\pi^2} \frac{V^2}{a^2 \omega^2} q_a^* \cos \tau; \quad (5)$$

принято $\zeta = f(t)/h$, $\zeta_0 = f_0/h$, $\tau = \omega t$; введены безразмерные параметры $p^* = \rho a^2/Eh^2$, $p_u^* = \rho_u a^2/Eh^2$, $q_a^* = q_a a^2/Eh^2$. Параметр верхнего критического напряжения p_u^* равен

$$p_u^* = \frac{\pi^2 (1 + \lambda^2)^2}{12 (1 - \mu^2)} + \frac{k^2 \lambda^4}{\pi^2 (1 + \lambda^2)^2}, \quad (6)$$

где $\lambda = a/b$, $k = b^2/Rh$. Величина ω_0^2 , равная квадрату основной частоты собственных колебаний панели при малых прогибах, определяется выражением

$$\omega_0^2 = \pi^2 p_u^* \frac{V^2 h^2}{a^4}; \quad (7)$$

здесь V — скорость распространения упругих волн в материале оболочки $V = (Eg/\gamma)^{1/2}$. Через α в (5) обозначено

$$\alpha = 1 + \frac{1 - \mu^2}{\left[(1 + \lambda^2)^2 + \frac{12\lambda^4 k^2 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \right] \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)} \left\{ \frac{3}{2} (1 + \lambda^4) \zeta_0^2 - \frac{16\lambda^4 k}{\pi^4} \left[1 + \frac{8}{(1 + \lambda^2)^2} \right] \zeta_0 \right\}. \quad (8)$$

Под β и η понимаются величины

$$\beta = \frac{1 - \mu^2}{\left[(1 + \lambda^2)^2 + \frac{12\lambda^4 k^2 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \right] \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)} \left\{ \frac{16\lambda^4 k}{\pi^4} \left[\frac{1}{2} + \frac{8}{(1 + \lambda^2)^2} \right] - \frac{9}{4} (1 + \lambda^4) \zeta_0 \right\}, \quad (9)$$

$$\eta = \frac{0,75 (1 - \mu^2) (1 + \lambda^4)}{\left[(1 + \lambda^2)^2 + \frac{12\lambda^4 k^2 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \right] \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)}. \quad (10)$$

Положив в выражениях (5), (8–10) $\zeta_0 = 0$, приходим к случаю вынужденных колебаний идеальной панели. При $q_n = 0$ получим уравнение, отвечающее собственным колебаниям панели. Эти случаи исследовались ранее Г. В. Мишенковым [8].

§ 2. Рассмотрим сначала статическую задачу. Опуская динамические члены в уравнении (5), получим

$$\alpha \zeta - \beta \zeta^2 + \eta \zeta^3 = \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} + q, \quad (11)$$

где параметр нагрузки q равен

$$q = \frac{16}{\pi^2} \frac{V^2}{a^2 \omega_0^2} \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)^{-1} q_n. \quad (12)$$

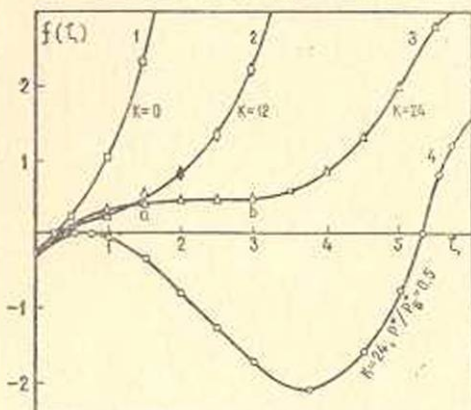
При соответствующего однородного уравнения отвечают возможным равновесным положениям ненагруженной идеальной панели. При $\beta < 2\sqrt{\eta}$ имеется одно положение равновесия, около которого происходят колебания; при $\beta > 2\sqrt{\eta}$ получим три положения равновесия. Возможные положения равновесия нагруженной оболочки определяются, исходя из зависимости

$$f(\zeta) = \alpha \zeta - \beta \zeta^2 + \eta \zeta^3 - \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} - q. \quad (13)$$

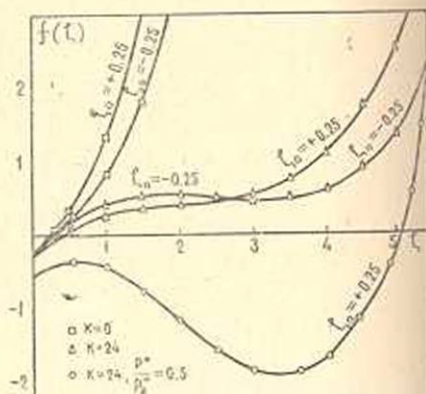
На фиг. 1 представлены соответствующие кривые 1–3 для квадратных идеальных панелей при $k=0$ (плоская панель), $k=12$, $k=24$; во всех случаях принято $q=0,3$. Линия 4 отвечает случаю панели, нагруженной одновременно поперечным давлением и продольной сжимающей силой; эта линия пересекает ось ζ в трех точ-

ках, что соответствует трем возможным равновесным положениям системы.

Влияние начальной погиби демонстрируется данными, приведенными на фиг. 2. График построен для панелей с теми же параметрами кривизны и при тех же условиях нагружения, что и на фиг. 1; на обеих фигурах приняты одинаковые обозначения.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 3. Перейдем к исследованию амплитудно-частотных зависимостей, используем при этом путь, предложенный Э. И. Григолюком [7]. Примем решение уравнения (5) в виде $\zeta = a \cos \tau$; подставив это выражение в (5) и выполняя условие ортогональности результата подстановки к функции $\cos \tau$ по четверти периода, получим

$$v^2 + \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{p^*}{p_n}}} v - a + \frac{8}{3\pi} \beta a - \frac{3}{4} \eta a^2 + \frac{4}{\pi a} \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} + \frac{q}{a} = 0, \quad (14)$$

где

$$v = \frac{\omega}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{p^*}{p_n}}}. \quad (15)$$

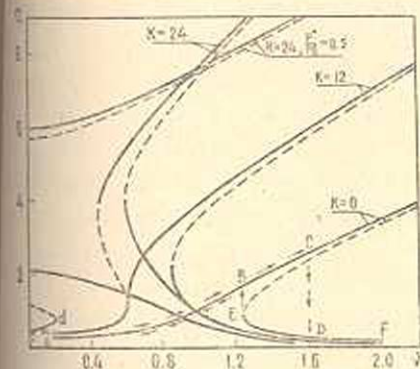
При $\varepsilon = 0$ будет

$$v^2 = a - \frac{8}{3\pi} \beta a + \frac{3}{4} \eta a^2 - \frac{4}{\pi a} \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} - \frac{q}{a}. \quad (16)$$

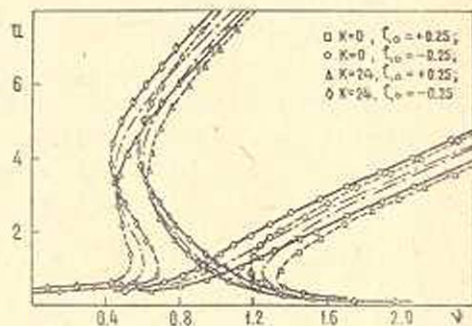
При $q=0$ получаем уравнение так называемой „скелетной“ линии, отвечающее случаю свободных колебаний панели.

На фиг. 3, 4 представлены амплитудно-частотные характеристики по (16); по-прежнему принято $q=0,3$. Проследим характер изменения амплитуды с возрастанием частоты для случая плоской панели ($k=0$). Вдоль участка AB амплитуда меняется монотонно. За точкой B возможны колебания различного типа. В некоторой точке C , положение

которой в каждом конкретном случае определяется особо, происходит "срыв" колебаний: амплитуда падает скачком до значения, отвечающего точке D нижней ветви. Дальнейшее уменьшение амплитуды соответствует ветви DF . При уменьшении частоты происходит скачкообразное изменение амплитуды в точке E . Явление "срыва" колебаний наблюдалось экспериментально Кирхманом и Гринспоном [1] при изучении реакции плоских панелей на воздействие шума при уровне звукового давления в 150 дБ.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В случае панели с параметром кривизны, равным 12, эффект нелинейности возрастает. При параметре кривизны, равном 24, получаем две области неустойчивости.

Рассмотрим далее случай, когда панель подвергается дополнительному действию продольных усилий, интенсивность которых составляет $1/2$ от верхнего критического значения. При этом становятся возможными три вида колебательных движений: а) колебания около основного устойчивого положения равновесия, б) колебания около прощелкнутого устойчивого положения, в) колебания, охватывающие оба эти положения. Колебаниям около основного положения равновесия соответствует ветвь $cm\bar{d}$; верхние ветви отвечают третьему типу колебаний.

Данные, представленные на фиг. 4, демонстрируют влияние начальной погиби на амплитудно-частотные зависимости; штрих-пунктирные линии отвечают случаю идеальной панели. Как видим, начальные неправильности, направленные к центру кривизны, как бы "спрямляют" амплитудно-частотные кривые; напротив, наличие отрицательной начальной погиби приводит к усилению эффекта нелинейности.

В заключение отметим, что полученные здесь данные для идеальных панелей достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными Г. В. Мишенковым по методу "гармонического баланса", если проводить сравнение максимальных значений прогибов панелей относительно невозмущенного состояния.

Ս. Ս. Վոլմիր, Ի. Գ. Կիլդիբեկով

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՎՈՒՍՏԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է ակուստիկ ճնշման տակ գտնվող «իրիալական» ձևի զլանալին պանելի և սկզբնալին անճշտություններով միջին մակերևույթի ձև ունեցող պանելի ստիպողական ոչ-գծային տատանումների խթն-դիրք: Պանելի հողակապալին հենման դեպքի համար թաղանթների տեսությունն ոչ-գծային հավասարումների սխառմը Բուրնոյ-Գալյորկինի եղանակի օգնությամբ բերվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարման: Ամպլիտուդային-հաճախականությունների կապը ստանալու համար օգտագործված է Է. Ի. Գրիգուլյուկի եղանակը: Ալյումինե բերված են տատանումների ժամանակ պանելների վարքագծի վրա կորոթվան, սկզբնալին անճշտություններով միջին մակերևույթի ձևի և բռնափորման պայմանի պարամետրների ազդեցությունը ցուցադրող գրաֆիկները: Երևք հավասարակշռության վիճակ ունեցող պանելի համար հնարավոր են մեծ ամպլիտուդով տատանումներ, որոնք ուղեկցվում են սխառմի մի կալան հավասարակշռության վիճակից մի ուրիշ հավասարակշռության վիճակին շրջվելով անցումով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kirchman E. J. and Greenspon J. E. Nonlinear response of aircraft panels in acoustic noise. J. Acoust. Soc. Amer., **29**, № 7, 1957, 854—857.
2. Lassiter L. W., Hess R. W. and Hubbard H. H. An experimental study of the response of simple panels to intense acoustic loading. J. Aeronaut. Sci., **24**, № 1, 1957, 19—24.
3. Lin Y. K. Response of a nonlinear flat panel to periodic and randomly-varying loadings. J. Aerospace Sci., **29**, № 9, 1962, 1029—1033.
4. Goodman L. E., Rattayya J. V. Review of panel flutter and effects of aerodynamic noise. Applied Mech. Reviews, **13**, № 2, 1960, 81—87 (перепод: „Механика“, ИЛ, № 5, 1960, 135—152).
5. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории пластин и оболочек. Теория оболочек и пластин. Изд. АН АрмССР, 1964.
6. Диментберг М. Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках. Известия АН СССР, ОН, Мех. и машиностр., № 5, 1962, 102—110.
7. Григорулук Э. И. О колебаниях пологой круговой цилиндрической панели, испытывающей конечные прогибы. ПММ, **19**, № 3, 1955, 376—382.
8. Митенков Г. В. Вынужденные нелинейные колебания упругих панелей. Известия АН СССР, ОН, Мех. и машиностр., № 4, 1961, 97—103.
9. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.