

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, А. А. Бабоян

О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой

Задача о равновесии упругой сферы исследовалась в работах Ламе [1], В. Томсона [2], Кри [3], Б. Г. Галеркина [4], А. И. Лурье [5,6], К. Вебера [7], Э. Штернберга и Ф. Розенталя [8] и других [9-15].

В этих работах рассмотрены некоторые случаи о напряженном состоянии сплошных и полых сфер.

В настоящей работе рассматривается одна контактная задача для упругой сферы.

Решение задачи сводится к определению некоторых коэффициентов из „парных“ рядов, содержащих полиномы Лежандра. Эта последняя задача, в свою очередь, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

§ 1. Постановка задачи

Пусть упругая сфера, окантованная экваториальной жесткой обоймой, находится под действием симметричной относительно оси и экваториальной плоскости нормальной нагрузки (фиг. 1). Касательные напряжения на всей поверхности сферы полагаем отсутствующими.

В силу симметрии достаточно рассматривать деформацию только четвертой части сферы.

Граничные условия этой задачи имеют вид

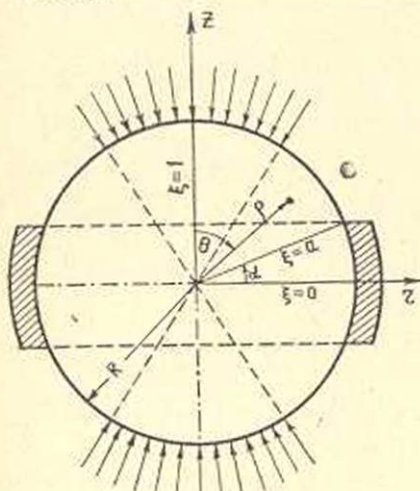
$$\begin{aligned} u_r|_{r=R} &= 0 & \left(\frac{\pi}{2} - \alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \tau_{r\theta}|_{r=R} &= 0 & \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right), \\ \sigma_r|_{\theta=R} &= \psi^*(\theta) & \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \alpha \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Условия симметрии относительно оси z и плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ (или $z=0$) представляются соотношениями

$$u_\theta|_{\theta=0} = \tau_{\rho\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$u_\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \tau_{\rho\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Здесь u_ρ и u_θ — радиальный и меридиональный компоненты перемещения; $\tau_{\rho\theta}$ и σ_ρ — касательное и нормальное напряжения в сферических координатах ρ, θ, φ ; $\psi^*(\theta)$ — кусочно-непрерывная функция, определяющая вид нормальной нагрузки, а α — параметр, определяющий ширину ободья.



Фиг. 1.

Уравнения равновесия в сферических координатах при условии осевой симметрии и отсутствия массовых сил имеют вид

$$(\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial \rho} (2\rho \omega_\varphi \sin \theta) = 0, \quad (1.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial}{\partial \theta} (2\rho \omega_\varphi \sin \theta) = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) \right],$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\theta) - \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right], \quad (1.4)$$

λ и μ — коэффициенты Ламе.

Переходя от координаты θ к координате $\xi = \cos \theta$, ищем решение уравнений (1.3) в виде рядов

$$u_\rho = f_0(\rho) + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} f_k(\rho) P_k(\xi), \quad (1.5)$$

$$u_\theta = \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \varphi_k(\rho) (1 - \xi^2)^{1/2} P'_k(\xi).$$

Здесь $P_k(\xi)$ — полиномы Лежандра [10], $P'_k(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_k(\xi)$, а $f_0(\rho)$,

$f_k(\rho)$ и $\varphi_k(\rho)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя выражения (1.5) и (1.4) в уравнения равновесия (1.3), после некоторых преобразований для определения функций $f_0(\rho)$, $f_k(\rho)$ и $\varphi_k(\rho)$ получим дифференциальные уравнения типа Эйлера, решения которых берем в форме

$$f_n(\rho) = A_n \frac{\rho}{R},$$

$$f_k(\rho) = -kA_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} - \frac{\lambda k + \mu(k-2)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} (k+1) C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1}, \quad (1.6)$$

$$\varphi_k(\rho) = A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} + C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1},$$

где постоянные интегрирования A_0 , A_k и C_k подлежат определению из граничных условий.

В координатной системе ρ , ξ , φ условия (1.1) и (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} u_\rho|_{\rho=R} &= 0 & (0 \leq \xi < a = \sin \alpha), \\ \tau_{\rho\theta}|_{\rho=R} &= 0 & (0 \leq \xi \leq 1), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=R} = \frac{\psi(\xi)}{R} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (a < \xi \leq 1);$$

$$\left. \begin{aligned} u_\theta|_{\xi=1} = \tau_{\rho\theta}|_{\xi=1} &= 0 \\ u_\theta|_{\xi=0} = \tau_{\rho\theta}|_{\xi=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \rho \leq R). \quad (1.8)$$

Здесь введено обозначение

$$\psi^*(\theta) = \frac{\psi(\xi)}{R} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}. \quad (1.9)$$

Пользуясь обычными формулами

$$\sigma_\rho = \frac{\lambda}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u_\theta \sin \theta) \right] + 2\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad (1.10)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \xi} - \frac{u_\theta}{\rho} \right]$$

и соотношениями (1.5) и (1.6), для напряжений σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{3\lambda + 2\mu}{R} A_0 - \frac{2\mu}{R} \sum_{k=2,4,\dots} P_k(\xi) \left\{ k(k-1) A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(k+1)[\lambda(k^2 - k - 3) + \mu(k+1)(k-2)]}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} &= \frac{2\mu}{R} \sum_{k=2,4,\dots} (1-\xi^2)^{1/2} P'_k(\xi) \left[(k-1) A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Нетрудно убедиться, что условия (1.8) удовлетворяются тождественно, при этом должно быть использовано соотношение

$$P'_{2m}(0) = 0. \quad (1.13)$$

Удовлетворяя, далее, условиям (1.7), находим

$$C_k = - \frac{(k-1)[\lambda(k+3) + \mu(k+5)]}{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)} A_k, \quad (k=2, 4, \dots) \quad (1.14)$$

а для определения коэффициентов A_0 и A_k ($k=2, 4, \dots$) получим следующие ряды-уравнения

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k \left(k + \frac{1}{2} + \alpha_k \right) P_k(\xi) = \psi(\xi) \quad (a < \xi \leq 1), \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k P_k(\xi) = 0 \quad (0 \leq \xi < a),$$

где введены следующие обозначения

$$B_0 = A_0, \quad B_k = - \frac{\lambda k(2k+1) + 2\mu(2k^2-1)}{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)} A_k \quad (k=2, 4, \dots), \quad (1.16)$$

$$\alpha_k = - \frac{4\mu^2 k^2 + (\lambda - \mu)(3\lambda + 4\mu)k + 6\lambda^2 + 14\lambda\mu + 6\mu^2}{2(\lambda + \mu)[\lambda(2k+1)k + 2\mu(2k^2-1)]}. \quad (1.17)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к определению коэффициентов B_k ($k=0, 2, \dots$) из „парных“ рядов (1.15), содержащих полиномы Лежандра. После определения коэффициентов все постоянные интегрирования определяются соотношениями (1.14) и (1.16).

§ 2. Исследование „парных“ рядов

Если в рассмотренной нами задаче принять, что при наличии сжимающих сил жесткая обойма, в свою очередь, вдавливается в сферу, тогда решение задачи сведется к „парным“ рядам-уравнениям вида

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k \left(k + \frac{1}{2} + \alpha_k \right) P_k(\xi) = \psi(\xi) \quad (a < \xi \leq 1), \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k P_k(\xi) = g(\xi) \quad (0 \leq \xi < a),$$

где B_k — неизвестные коэффициенты, числа α_k при $k \rightarrow \infty$ остаются ограниченными, $g(\xi)$ — непрерывная функция и имеет кусочно-непрерывную производную, а $\psi(\xi)$ — кусочно-непрерывная функция, имеющая ограниченное изменение в указанном интервале.

Ввиду этого целесообразно вместо системы (1.15) рассматривать более общую систему (2.1).

Предварительно рассмотрим следующую систему

$$\sum_{n=0} X_n \left(n + \frac{1}{2} + \alpha_n \right) P_n(\xi) = \psi(\xi) \quad (0 < a < \xi < 1), \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=0} X_n P_n(\xi) = g_1(\xi) \quad (-1 \leq \xi < a).$$

Подобная система в частном случае была рассмотрена в работе И. М. Минкова [17], а общее решение этой системы при $x_n = 0$ дано в работе А. А. Баблюяна [18].

Займемся решением „парных“ рядов (2.2). Для этого обозначим значение второго ряда (2.2) в области $a < \xi \leq 1$ через $W(\xi)$

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n(\xi) \quad (a < \xi \leq 1). \quad (2.3)$$

Тогда из второго уравнения системы (2.2) и из (2.3) для коэффициентов X_n получим

$$X_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^a g_1(\xi) P_n(\xi) d\xi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_a^1 W(\xi) P_n(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

С помощью известной формулы

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma \right] = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}} \int_{\gamma}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}} \quad (2.5)$$

преобразуем первое уравнение системы (2.2) к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left(1 + \frac{2x_n}{2n+1}\right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}}. \quad (2.6)$$

Умножив теперь обе части уравнения (2.6) на $(1 - \gamma^2)^{-1/2}$ и проинтегрировав полученное выражение по γ в пределах от a до γ , получим

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{2n+1} \left(1 + \frac{2x_n}{2n+1}\right) \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma \right] - \right. \\ & \left. - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos a \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}} \quad (a < \gamma \leq 1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя значение X_n из (2.4) в (2.7), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \int_a^{\gamma} \frac{W(\xi) d\xi}{(\gamma - \xi)^{1/2}} &= \int_{-1}^a [(a - \xi)^{-1/2} - (\gamma - \xi)^{-1/2} + S(\xi, \gamma)] g_1(\xi) d\xi + \\ &+ \int_a^1 S(\xi, \gamma) W(\xi) d\xi + \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где введено обозначение

$$S(\xi, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}a_n}{2n+1} P_n(\xi) \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos a \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] \right\}. \quad (2.9)$$

При получении формулы (2.8) использовано известное значение ряда [19]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] = \begin{cases} [2(\gamma - \xi)]^{-1/2} & (\gamma > \xi) \\ 0 & (\gamma < \xi). \end{cases} \quad (2.10)$$

Пользуясь формулой обращения интегрального уравнения типа Абеля, для определения функции $W(\xi)$ из (2.8) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 S(\xi, \gamma) W(\xi) d\xi + \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} + \right. \\ \left. + \int_{-1}^a [(a-\xi)^{-1/2} - (\gamma-\xi)^{-1/2} + S(\xi, \gamma)] g_1(\xi) d\xi \right\} \quad (a < z \leq 1). \quad (2.11)$$

Примем далее, что

$$g_1(\xi) = \begin{cases} W(\xi) & (-1 < \xi < -a) \\ g(\xi) & (-a < \xi < a) \end{cases} \quad (2.12)$$

и рассмотрим случай, когда функции $W(\xi)$ и $g(\xi)$ обе четные.

В этом случае формулу (2.4) и интегральное уравнение (2.11) можно представить в виде

$$X_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) [1 + (-1)^n] \left\{ \int_0^a g(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 W(\xi) P_n(\xi) d\xi \right\}, \quad (2.13)$$

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_0^1 [(a+\xi)^{-1/2} - (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] W(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^a [(a+\xi)^{-1/2} - (\gamma+\xi)^{-1/2} + (a-\xi)^{-1/2} - (\gamma-\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] g(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\}, \quad (2.14)$$

где

$$S_1(\xi, \gamma) = S(\xi, \gamma) + S(-\xi, \gamma). \quad (2.15)$$

Отсюда видно, что решение (2.13) системы (2.2) совпадает с решением „парных“ рядов (2.1), то есть

$$X_{2k} = B_{2k}, \quad X_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.16)$$

функция $W(z)$, которая определяется из интегрального уравнения (2.14), является значением второго ряда системы (2.1) в области $a < z < 1$, то есть значением перемещения в этой области.

Для задачи, рассмотренной в § 1, положив в формулах (2.13) (2.14) $g(\xi) = 0$, получим значение коэффициентов „парных“ рядов (2.15) в виде

$$B_k = (2k+1) \int_a^1 W(\xi) P_k(\xi) d\xi, \quad (2.17)$$

где функция $W(z)$ определяется из интегрального уравнения

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 [(a+\xi)^{-1/2} - (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] W(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_a^1 \frac{d\gamma}{V 1-\gamma^2} \int_1^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\} \quad (a < z < 1). \quad (2.18)$$

Здесь

$$S_1(\xi, \gamma) = 4\sqrt{2} \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} P_k(\xi) \left\{ \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \arccos a \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] \right\}. \quad (2.19)$$

Следует отметить, что если в (2.11) и (2.12) принять обе функции $W(\xi)$ и $g(\xi)$ нечетными (это может иметь место при решении других краевых задач о сфере), то в этом случае (2.4) и уравнение (2.11) примут вид

$$X_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) [1 - (-1)^n] \left\{ \int_0^a g(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 W(\xi) P_n(\xi) d\xi \right\}, \quad (2.20)$$

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 [S_2(\xi, \gamma) - (a+\xi)^{-1/2} + (\gamma+\xi)^{-1/2}] W(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^a [(a-\xi)^{-1/2} - (\gamma-\xi)^{-1/2} - (a+\xi)^{-1/2} + (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_2(\xi, \gamma)] g(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_a^1 \frac{d\gamma}{V 1-\gamma^2} \int_1^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\}, \quad (2.21)$$

$$S_2(\xi, \gamma) = S(\xi, \gamma) - S(-\xi, \gamma). \quad (2.22)$$

Легко видеть, что при этом решение (2.20) системы (2.22) совпадает с решением следующих „парных“ рядов уравнений

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \left(k + \frac{1}{2} + \alpha_k \right) P_k(\xi) = \psi(\xi) \quad (a < \xi < 1), \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k P_k(\xi) = g(\xi) \quad (0 < \xi < a),$$

то есть

$$X_{2k+1} = A_{2k+1}, \quad X_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 IV 1964

Դ. Խ. ՀԱՐՈՒՅՈՒՆՅԱՆ, Բ. Լ. ԱՐԴՄՅԱՆ, Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ

ԿՈՇՏ ՕՂԱԿԱԶԵԿ ԳՈՏԵԿԱՊՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԳՆԴԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում գիտարկվում է առաձգական գնդի համար մի կոնտակտային խնդիր:

Խնդրի լուծումը բերվում է կեմանդրի ֆունկցիաներ պարունակող «գույլ» շարքերից որոշ զործակիցների որոշմանը: Այս վերջին խնդիրը իր հերթին բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lame G.* Lecons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.
2. *Thomson W. (Kelvin).* Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid. Math. and Phys. Papers. 111, 1890, 351; Trans. Roy. Phil. Soc., 153, 1863.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. Trans. Cambr. Phil. Soc., 14, 1889, 250—369.
4. *Галеркин Б. Г.* Равновесие упругой сферической оболочки, ПММ, 6, вып. 6, 1942, 487—496.
5. *Лурье А. И.* Равновесие упругой полой сферы, ПММ, 17, вып. 3, 1953, 311—332.
6. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
7. *Weber C.* Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. Zeitschr. f. ang. Math. und Mech., 32 № 6, 1952, 186—195.

8. Sternberg E., Rosenthal F. The elastic sphere under concentrated loads. Journ. Appl. Mech., **19**, № 4, 1952, 413—421; **20**, № 2, 1953, 304—307; Сборник сокращ. переводов ин. лит. „Механика“, 1954, № 1 (23), 109—124.
9. Leutert W. The heavy sphere supported by a concentrated force. Pacific Journ. of Mathematics, **1**, № 1, 1951, 97—101.
10. Collins D. On the stress distributions due to force nuclei in an elastic solid bounded internally by a spherical hollow and in an elastic sphere. ZAMP, **11**, № 1, 1960, 3—16.
11. Dean W. R., Parsons H. W., Sneddon I. N. A type of stress distribution on the surface of semiinfinite elastic solid. Proc. Cambr. Phil. Soc., **40**, Part 1, 1944, 5—19.
12. Prelog E. Integration des équations élastostatiques de Lamé pour une charge quelconque sur la sphère et la cylindre ayant une épaisseur quelconque. Actes IX Congr. internat. mécan. appl., **5**, Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 143—154.
13. Александров А. Я., Вольперт В. С. О применении одного метода решения осесимметричных задач теории упругости к задаче о шаре и о пространстве с шаровой полостью. Известия АН СССР, ОТН, Механика и маш. № 6, 1961, 106—109.
14. Sternberg E., Eubanks A., Sadowsky M. A. On the axisymmetric problem of elasticity theory for a region bounded by two concentric spheres. Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Chicago, June 1951, N. Y., 1952, 209—215.
15. Соляник-Крацца К. В. Решение осесимметричной задачи в сферических координатах. Труды Ленинградского политехн. института, № 178, Гидротехника и строит. дело, 1955, 133—149.
16. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
17. Минков И. М. О некоторых функциональных уравнениях. ПММ, **24**, вып. 5, 1960, 964—967.
18. Баблюя А. А. Решение некоторых парных рядов. ДАН АрмССР, **39**, 1964.
19. Градштейн И. С., Ризик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962, 1043.