ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 3, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек*

Введение. Настоящий обзор посвящается современным вопросам теории анизотропных и неоднородных (слоистых) оболочек. Здесь освещаются лишь те вопросы, которые наиболее важны с точки зрения автора и по своему духу близки его научным интересам.

Обзор составлен на основании работ, опубликованных как у нас в СССР, так и за границей. Однако, основное внимание уделяется исследованиям советских авторов.

Здесь сознательно не рассматриваются работы, посвященные трехслойным оболочкам, так как они достаточно полно освещены в ранее опубликованном обзоре [1].

Из большого числа работ, посвященных теории анизотропных слоистых оболочек, здесь будет цитирована лишь часть, которая необходима автору для подтверждения выдвинутых идей и положений.

Считаем нужным отметить, что первые работы по теории анизотропных оболочек выполнены в СССР в двадцатых годах нашего века и посвящены вопросу теории осесимметрично нагруженных ортотропных оболочек вращения [2].

Вопросы линейной теории статического равновесия анизотропных слоистых оболочек. Основы общей теории статического равновесия анизотропных слоистых оболочек разрабатывались на базе классической теории изотропных оболочек [3—6] и теории анизотропных слоистых пластинок [7, 8]. Симбиоз этих двух разделов теории упругости дал возможность построить общую теорию анизотропных слоистых оболочек на уровне классической теории изотропных оболочек. Однако, построенная при этом теория содержит серию специфических особенностей, которые препятствуют непосредственному распространению всех результатов классической теории изотропных оболочек на случай анизотропных слоистых оболочек.

Вся специфика теории анизотропных слоистых оболочек обусловлена соотношениями упругости, которые принципиально отличаются от соотношений упругости однородных изотропных оболочек.

Принимая для всего пакета оболочки в целом гипотезу недеформируемых нормалей, построена общая теория анизотропных сло-

* Работа доложена на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

истых оболочек в случае, когда в каждой точке каждого слоя имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки [9—13].

Как и следовало ожидать [7, 8], в общей теории анизотропных слоистых оболочек уравнения равновесия*:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2 + \frac{\partial AS_{21}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12} + ABk_1N_1 = -ABX,\\
\frac{\partial AT_2}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}T_1 + \frac{\partial BS_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{21} + ABk_2N_2 = -ABY,\\
-(k_1T_1 + k_2T_2) + \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial BN_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial AN_2}{\partial\beta}\right) = -Z, \qquad (1)\\
\frac{\partial BM_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial AH_{21}}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}H_{12} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2 = ABN_1,\\
\frac{\partial AM_2}{\partial\beta} + \frac{\partial BH_{12}}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}H_{21} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_1 = ABN_2,\\
S_{12} - S_{21} + \frac{H_{12}}{R_1} - \frac{H_{21}}{R_2} = 0,
\end{gathered}
$$

геометрические соотношения:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v + k_1w, \quad \varepsilon_2 = \cdots\\
\omega = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right),\\
\varkappa_1 = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right) - \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{\partial k_1}{\partial\alpha}\frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial\beta}\frac{v}{B} - k_1^2w, \quad \varkappa_2 = \cdots \qquad (2)\\
\tau = -\frac{2}{AB}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right) +\\
+ (k_1 - k_2)\left[\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) - \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)\right];
\end{gathered}
$$

уравнения неразрывности:

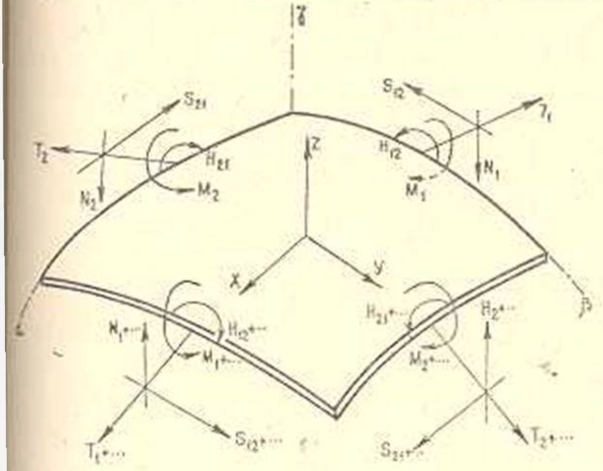
$$
\begin{gathered}
B\frac{\partial\varkappa_2}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varkappa_2 - \varkappa_1) - \frac{A}{2}\frac{\partial\tau}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}\tau + k_2\frac{\partial A}{\partial\beta}\omega +\\
+ k_1\left[A\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + \omega\frac{\partial A}{\partial\beta} - B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right] = 0,\\
A\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\beta} + \frac{\partial A}{\partial\beta}(\varkappa_1 - \varkappa_2) - \frac{B}{2}\frac{\partial\tau}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau + k_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega +\\
+ k_2\left[B\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega - A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right] = 0, \qquad (3)
\end{gathered}
$$

* Здесь и в последующем принимаются общеизвестные обозначения [3—8, 13].

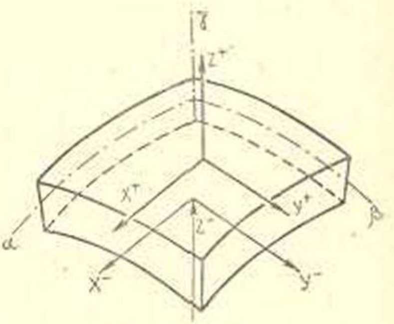
$$k_2\varkappa_1 + k_1\varkappa_2 + \frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left[B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-\frac{A}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\omega\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left[A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)-\frac{B}{2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega\right]\right\}$$

и геометрические граничные условия остаются такими же, как и в случае изотропных оболочек [3—6]. Статические же граничные условия остаются неизменными лишь в общей формулировке (фиг. 1, 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Что же касается соотношений упругости, то они, как было указано выше, принципиально отличаются от соотношений упругости теории изотропных оболочек и в случае анизотропных слоистых оболочек, в простейшем варианте, записываются следующим образом:

$$(T_1,\ T_2)\quad T_i = C_{ii}\varepsilon_i + C_{ik}\varepsilon_k + \underline{C_{ij}\omega + K_{ii}\varkappa_i + K_{ik}\varkappa_k + K_{ij}\tau},$$

$$(S_{12},\ S_{21})\quad S_{ik} = C_{jj}\omega + \underline{C_{ij}\varepsilon_i + C_{kj}\varepsilon_k + K_{jj}\tau + K_{ij}\varkappa_i + K_{kj}\varkappa_k +}$$

$$\underline{+ k_k(K_{jj}\omega + K_{ij}\varepsilon_i + K_{kj}\varepsilon_k + D_{jj}\tau + D_{ij}\varkappa_i + D_{kj}\varkappa_k)},$$

$$(M_1,\ M_2)\quad M_i = D_{ii}\varkappa_i + D_{ik}\varkappa_k + \underline{D_{ij}\tau + K_{ii}\varepsilon_i + K_{ik}\varepsilon_k + K_{ij}\omega}, \tag{4}$$

$$(H_{12},\ H_{21})\quad H_{ik} = D_{jj}\tau + \underline{D_{ij}\varkappa_i + D_{kj}\varkappa_k + K_{jj}\omega + K_{ij}\varepsilon_i + K_{kj}\varepsilon_k}$$

$$(i=1,\ 2;\quad k=1,\ 2;\quad j=6).$$

(Поперечные силы N_i, как и в случае изотропных оболочек, определяются из уравнений равновесия).

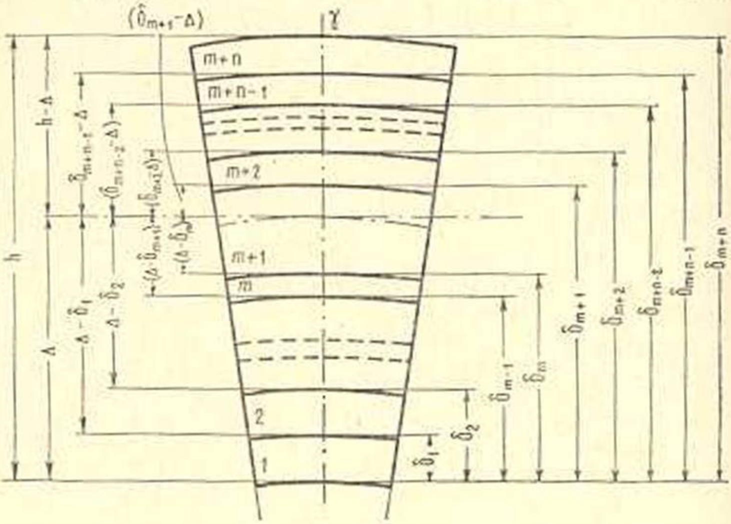
Для полноты картины приведем также значения жесткостей (фиг. 3)

$$C_{pq} = \sum_{s=1}^{m+n} B_{pq}^{s}(\delta_s - \delta_{s-1}),$$

$$K_{pq} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m+n} B_{pq}^{s}\left[(\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2) - 2\Delta(\delta_s - \delta_{s-1})\right], \tag{5}$$

$$D_{pq}=\frac{1}{3}\sum_{s=1}^{m+n}B_{pq}^{s}\left[(\delta_s^3-\delta_{s-1}^3)-3\Delta(\delta_s^2-\delta_{s-1}^2)+3\Delta^2(\delta_s-\delta_{s-1})\right].$$

Рассматривая соотношения упругости (4), замечаем, что в общем случае анизотропии (здесь и в последующем под общим случаем анизотропии оболочки будем понимать случай, когда в каждой точке каждого слоя имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки), в отличие от случая однородной изо-



Фиг. 3.

тропной оболочки, соотношения упругости анизотропных слоистых оболочек содержат «дополнительные» члены, которые могут иметь порядок «основных» членов. Эти «дополнительные» члены (подчеркнутые в (4)) характеризуют взаимное влияние различных видов деформаций.

В силу указанной структуры соотношений упругости, основные уравнения теории анизотропных слоистых оболочек, даже в случае весьма пологих или круговых цилиндрических оболочек, записываются в виде сложной и громоздкой системы дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка с неразделяющимися переменными.

Полную систему дифференциальных уравнений линейной теории анизотропных слоистых оболочек можно составить и решить различными способами [13]. Наиболее распространенными способами являются:

а) решение задачи в перемещениях, то есть представление полной системы уравнений в виде трех дифференциальных уравнений относительно трех искомых перемещений $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w&=X,\\ L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w&=Y,\\ L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w&=Z, \end{aligned}\tag{6}$$

б) решение задачи в перемещениях и функциях напряжений, то есть, например, представление полной системы в виде двух дифференциальных уравнений относительно нормального перемещения w и функции напряжений $F(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} L_1 w - L_3 F + \nabla_r F = Z \\ L_2 F + L w + \nabla_r w = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

в) решение задачи в потенциальных функциях, то есть, например, представление основного уравнения в виде одного уравнения восьмого порядка относительно одной потенциальной функции Φ

$$L_8 \Phi + L_6 \Phi + L_4 \Phi = 0. \tag{8}$$

г) решение задачи в усилиях и моментах, то есть непосредственно с помощью уравнений равновесия (1) и уравнений неразрывности деформаций, записанных в усилиях и моментах.

В этих уравнениях линейные операторы L_i с переменными коэффициентами (в общем случае) содержат множители, зависящие от жесткостей C_{ik}, K_{ik}, D_{ik}.

В общем случае эти операторы имеют весьма сложную структуру, например,

$$L_4 = \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\left\{B\frac{\partial}{\partial \alpha}L(d_{22}) + \frac{\partial B}{\partial \alpha}\left[L(d_{22}) - L(d_{11})\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{A}{2}\frac{\partial}{\partial \beta}L(d_{66}) - \frac{\partial A}{\partial \beta}L(d_{66})\right\} + \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\left\{A\frac{\partial}{\partial \beta}L(d_{11}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial A}{\partial \beta}\left[L(d_{11}) - L(d_{22})\right] - \frac{B}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}L(d_{66}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}L(d_{66})\right\},$$

где

$$L(d_{ik}) = \frac{d_{k2}}{B}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\right) + \frac{1}{A^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right] +$$

$$+ 2\frac{d_{k6}}{AB}\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right] +$$

$$+ \frac{d_{k1}}{A}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{1}{B^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \beta}\right], \quad d_{ik} = d_{ik}(C_{ik}, K_{ik}).$$

Описанная сложная картина существенно упрощается в случае ортотропных оболочек (здесь и в последующем под ортотропными оболочками будем понимать такие оболочки, которые изготовлены из ортотропного материала так, что два главных направления упругости в каждой точке каждого слоя оболочки совпадают с направлениями соответствующих линий кривизны срединной поверхности, а третье направление — с нормалью к срединной поверхности).

Для полноты картины укажем, что в случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости не совпадают с направлениями линий кривизны, повторяется картина общего случая анизотропии, то есть задача математически формулируется так же, как для общей анизотропии, при этом лишь надо учесть, что жесткости с индексами „i6" и „k6" будут представлены посредством соответствующих жесткостей с индексами «11», «22», «12», «66».

В случае ортотропных оболочек в соотношениях упругости все члены с коэффициентами «16» и «26» превращаются в нули и соотношения упругости приобретают структуру соотношений упругости изотропных оболочек. Поэтому исходные уравнения получают общую структуру соответствующих дифференциальных уравнений теории изотропных оболочек. При этом ошибочно утверждать, что теория ортотропных оболочек совпадает с теорией изотропных оболочек. Однако, следует отметить, что родственная структура разрешающих уравнений дает широкие возможности распространять разработанные для изотропных оболочек методы решения основных дифференциальных уравнений на случай ортотропных оболочек [13].

При построении общей теории анизотропных оболочек не были забыты и статико-геометрические аналогии. Как и в теории изотропных оболочек, установлены статико-геометрические аналогии [14], которые представляют структурную связь между однородными статическими и геометрическими соотношениями.

Таким образом, мы можем констатировать, что в принципе общая теория анизотропных слоистых оболочек на основании гипотезы недеформируемых нормалей построена. Однако, и на сегодня имеется много интересных вопросов, которые важны с точки зрения общей теории анизотропных оболочек. К таким вопросам, например, относятся: анализ асимптотических свойств интегралов дифференциальных уравнений анизотропных слоистых оболочек, установление связи между механическими характеристиками и асимптотическими свойствами интегралов уравнений и т. д. Большое прикладное значение имела бы разработка общих принципов установления рациональных типов анизотропии и неоднородности оболочек при заданных вероятных формах нагружения. Весьма актуальным надо считать разработку теории анизотропных оболочек, изготовленных из материалов с различными физико-механическими свойствами на сжатие и растяжение.

В завершение этого раздела приведем некоторые соображения относительно принятой исходной гипотезы недеформируемых нормалей Кирхгоффа-Лява.

В последнее время в литературе по теории оболочек и пластинок все чаще и чаще указывается, что гипотеза Кирхгоффа-Лява, будучи чисто геометрической, с известной точностью справедлива для тонких оболочек и пластинок независимо от типа материала оболочки. Такое утверждение надо считать неверным. Дело в том, что гипотеза недеформируемых нормалей, будучи геометрически сформулированной, имеет явно физико-механическое содержание. В этом легко убедиться, рассматривая, например, теории анизотропных оболочек и пластинок, построенные без гипотезы Кирхгоффа-Лява [13]. Из этих исследований видно, что теории оболочек и пластинок, построенные на основании гипотезы недеформируемых нормалей, безразличны к поперечным нормальным и сдвиговым характеристикам материала оболочки, т. е. к физико-механическим отношениям типа E_{ii}/G_{i3}, E_{ii}/G_{k3}, E_{ii}/E_{33} и т. д. Таким образом, принимая гипотезу недеформируемых нормалей, при различных значениях отношений типа E_{ii}/E_{33} и т. д., для рассматриваемой оболочки получим одни и те же значения перемещений и напряжений, что в корне ошибочно, тем более для анизотропных оболочек.

В связи с этим напрашивается разговор о точности и пределах применимости теории анизотропных слоистых оболочек, построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей.

Этот весьма важный вопрос привлек внимание исследователей лишь недавно и до сих пор окончательно не исследован. Дело в том, что установленная для однородных изотропных оболочек точность гипотезы Кирхгоффа-Лява сформулирована чисто геометрически и не отражает всей сложной картины, связанной с анизотропией и слоистостью оболочки.

Здесь взамен простой и четкой оценки

$$1 \pm \frac{h}{R_i} \approx 1$$

напрашивается что-то обобщающее, вроде

$$1 \pm f\left(\frac{h}{R_i}, \delta_i, \ E_{ii}/G_{i3}, \ E_{ii}/E_{33}, \cdots\right) \approx 1. \tag{9}$$

По-видимому, решение этой весьма важной проблемы следует искать в исследованиях анизотропных слоистых оболочек, выполняемых на базе уравнений трехмерной задачи теории упругости анизотропного тела.

В последующих разделах обзора будем рассматривать отдельные частные теории и отдельные типы оболочек. Однако, при этом будут освещаться не только узкие специфичные вопросы, но и общие положения, которые важны с точки зрения общей теории анизотропных слоистых оболочек вообще.

Безмоментная теория анизотропных слоистых оболочек. Как и в теории изотропных оболочек, под безмоментной теорией подразумевается приближенный метод расчета оболочек, основанный на предположении такого распределения расчетных напряжений по толщине оболочки, что в уравнениях равновесия (1) члены моментного происхождения могут быть пренебрежены. Эта наиболее элементарная теория до сих пор построена лишь для однородных и симметрично собранных относительно срединной поверхности слоистых анизотропных оболочек [15, 13]. Что же касается произвольно собранных слоистых оболочек, то здесь, в общем случае, нет возможности реализовать безмоментное напряженное состояние вообще и, пожалуй, можно говорить лишь об отдельно взятых безмоментных слоях оболочки.

Следует указать, что до последних лет безмоментная теория анизотропных оболочек, ввиду кажущейся тривиальности, не обращала на себя внимание широкого круга исследователей. Однако, уже выполненные исследования [15, 16, 13] говорят, что вопрос безмоментной теории анизотропных и, тем более, анизотропных слоистых оболочек представляет самостоятельный интерес и нуждается в дополнительных исследованиях*.

Любопытно отметить, что уже для однородной оболочки наличие „дополнительных" членов в соотношениях упругости (4) в задачах прочности и деформативности анизотропной оболочки приводит к качественно новым, специфичным результатам [13, 15].

Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения. Вопросам построения теории и разработки методов интегрирования уравнений симметрично нагруженных анизотропных слоистых оболочек вращения посвящены исследования многих авторов [2, 13, 17—24]. Однако, все известные нам работы, за исключением одной [23], посвящены ортотропным оболочкам. В этих работах, как правило, введением вспомогательных функций типа Мейсснера-Рейсснера исходные уравнения представляются в виде системы двух уравнений относительно двух искомых функций $V(s)$ и $W(s)$ или, в общем случае, наложением некоторых ограничений на механические характеристики оболочки ($C_{22}/C_{11} = K_{22}/K_{11} = D_{22}/D_{11} = \lambda$) система двух дифференциальных уравнений приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка относительно искомой комплексной функции σ

$$L(\sigma) + iA(C_{ik}, K_{ik}, D_{ik})\frac{\sigma}{R_2} = \Psi(s),$$
$$\sigma = w + i\varphi(C_{ik}, K_{ik}, D_{ik})\,w, \qquad (10)$$

(укажем, что в некоторых частных случаях для получения уравнения (10) нет необходимости вводить приведенные выше ограничения).

Исходные уравнения теории анизотропных слоистых оболочек вращения в общем случае, как правило, решаются методом асимптотического интегрирования. При этом ограничиваются лишь первым приближением (кстати, в этом случае введенное механическое ограничение теряет свою силу). Полученное таким образом решение, как и следовало ожидать, не может быть использовано вблизи особых точек. В теории анизотропных оболочек вращения нет исследований, в которых найденные интегралы исходных дифференциальных урав-

* Доскональное исследование безмоментного состояния анизотропных оболочек важно также потому, что безмоментная теория лежит в основе весьма важной задачи устойчивости анизотропных слоистых оболочек.

ений сохраняют силу и в особых точках [25, 26]. Такое исследование представило бы большой интерес, так как в отличие от изотропных оболочек, здесь мы, вероятно, столкнемся как с геометрическими, так и с физико-механическими особенностями оболочки. Пожалуй, здесь мы будем иметь физико-геометрические особые точки.

Анизотропия оболочки существенным образом влияет на величины зон распространения эффектов от линий и точек искажения. Например, она существенным образом влияет на зону распространения краевого эффекта. В этом легко убедиться, рассматривая формулу длины зоны распространения краевого эффекта в однородной ортотропной круговой цилиндрической оболочке

$$S^* = \pi R \sqrt{\frac{h}{R}} \left[3 \left(\frac{E_\varphi}{E_s} - \nu_\varphi^2 \right) \right]^{-1/4}. \tag{11}$$

Результаты, полученные при исследовании зон распространения эффектов от линий искажения, были использованы при построении теории конструктивно анизотропных оболочек вращения [13, 27]. В этих работах, использованием законов распространения краевого эффекта, установлены принципы „размазывания“ эффекта дискретно расположенных поперечных ребер при переходе к конструктивно анизотропным оболочкам.

Однако, мы считаем, что вопрос построения общей теории конструктивно анизотропных оболочек вращения и на сегодня представляет большой интерес. Здесь следует построить достаточно точную теорию оболочек вращения в общем случае анизотропии с дискретно расположенными поперечными ребрами и найти обоснованные правила „размазывания“ ребер по всей оболочке. При этом особого внимания требует задача контакта (точного) одного ребра с анизотропной оболочкой вращения.

В заключение этого раздела еще раз напомним, что лишь в одной работе [23] сделана попытка исследования оболочек вращения в общем случае анизотропии. В указанной работе рассматривается круговая цилиндрическая оболочка, изготовленная из ортотропного материала так, что главные направления упругости не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки, что, как было указано выше, задачу сводит к уравнениям общего случая анизотропии.

Мы считаем, что исследование симметрично нагруженных оболочек вращения в общем случае анизотропии должно быть в центре внимания исследователей, так как эта проблема имеет как большое теоретическое, так и важное прикладное значение. (Здесь мы, например, имеем в виду оболочки вращения, косоармированные стекловолокном, проволокой, железобетонные оболочки с косой арматурой, металлические оболочки с часто расположенными косыми ребрами и др.).

Анизотропные слоистые цилиндрические оболочки. Теория анизотропных цилиндрических оболочек разработана достаточно полно. Основные уравнения теории в случае однородных ортотропных оболочек были получены еще в тридцатых годах нашего столетия [28]. Что же касается общего случая анизотропии, то основные уравнения цилиндрических оболочек были получены лишь в 1948—50 годах [13].

Цилиндрическая форма оболочки принципиально новых особенностей в общую теорию не вносит, однако, в случае цилиндрических оболочек исходные уравнения существенно упрощаются и появляются реальные возможности решения этих уравнений в случае большой серии конкретных задач ортотропных оболочек.

Обобщением методов Навье и М. Леви на случай слоистых ортотропных оболочек, решены многочисленные конкретные задачи слоистых ортотропных цилиндрических оболочек, представляющие большой интерес для современной техники. Получены асимптотические формулы для внутренних усилий ортотропной цилиндрической оболочки в окрестности точки приложения сосредоточенной силы [29].

Много работ посвящено конструктивно анизотропным цилиндрическим оболочкам. Из этой серии работ особо следует отметить те, в которых, исходя из теории оболочек с конечным числом подкреплений, делаются попытки дать достаточно обоснованные условия „размазывания" ребер [5, 13, 27, 30—32].

Однако, как и в случае оболочек вращения, проблема „размазывания", то есть основная задача конструктивно анизотропных цилиндрических оболочек, до сих пор окончательно не разрешена. На сегодня мы еще не имеем четких и обоснованных рецептов, которыми можно пользоваться при рассмотрении цилиндрических оболочек с различными типами подкреплений, материалов ребер и оболочек, граничых условий и нагрузок. Особо важным надо считать разработку теории цилиндрических оболочек, косо подкрепленных ребрами или навивкой. В этом случае задача „размазывания" становится весьма специфичной, ибо сразу сталкиваемся с вопросами общего случая анизотропии.

Общий случай анизотропии является слабым местом в теории цилиндрических оболочек. В этой области почти ничего не сделано. Здесь мы большие надежды возлагаем на метод малого физического параметра, где в роли малого параметра, по которому разлагаются искомые величины задачи, выступает не относительная толщина h/R_1, а некоторая малая физическая величина типа [117]

$$\mu = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}D_{66}}} < 1. \tag{12}$$

В теории анизотропных оболочек особый интерес представляют задачи концентрации напряжений у краев отверстий, задачи оболочек с подкрепленными отверстиями и другие. Нам кажется, что эти задачи в случае существенно анизотропных оболочек должны быть исследованы с помощью более точных уравнений, чем уравнения классической теории, опирающейся на гипотезу недеформируемых нормалей. Дело в том, что классическая теория не в состоянии дать достаточно точную картину распределения напряжений вблизи от линий искажений, что очень важно при рассмотрении задачи оболочек с отверстиями [118]. Мы полагаем, что эти исследования надо начать с анизотропных весьма пологих и цилиндрических оболочек.

Теория анизотропных оболочек, ввиду большого числа независимых упругих постоянных, дает возможность по-иному, с единых физических позиций, подойти к построению приближенных теорий как изотропных, так и анизотропных оболочек. В некоторых работах [33, 34], варьированием упругих постоянных уравнений анизотропной цилиндрической оболочки, получены семь самостоятельных вариантов приближенных уравнений теории цилиндрических оболочек. Показана взаимная равнозначность некоторых геометрических и статических гипотез прикладных теорий оболочек.

С точки зрения построения приближенных теорий анизотропных оболочек вообще большой интерес представили бы исследования асимптотических свойств интегралов уравнений анизотропных цилиндрических оболочек.

Пологие анизотропные оболочки. Теория анизотропных слоистых оболочек с большим показателем изменяемости. В 1947—48 годах уже были записаны исходные дифференциальные уравнения теории пологих оболочек в общем случае анизотропии [9, 10], однако, до сих пор ни одна конкретная задача в общем случае анизотропии не решена, и все последующие исследования были посвящены ортотропным оболочкам [13].

При решении задач пологих ортотропных слоистых оболочек были использованы как метод Навье, так и метод М. Леви. Здесь достаточно эффективным оказывается обобщенный метод Навье, с усилением сходимости рядов путем выделения решений некоторой изотропной пластинки. Показано существенное влияние слоистости на напряженное и деформированное состояние пологих оболочек, в частности, указано, что периферийное расположение материалов с большим модулем упругости эффективнее для пологих оболочек, чем для подъемистых, а также эффективнее для оболочек с линиями и точками искажения, чем для гладких оболочек [13].

Проблема пологих оболочек в общем случае анизотропии, как и в случае других типов оболочек, остается не разрешенной и, вероятно, может быть разрешена с помощью применения метода малого физического или физико-геометрического параметра, то есть примерно так, как в случае цилиндрической оболочки.

Уравнения теории пологих анизотропных оболочек, как и в случае изотропных оболочек [6], могут быть истолкованы как уравнения теории оболочек с большим показателем изменяемости. Однако, как и следовало ожидать, они могут быть использованы и при решении задач, казалось бы мало похожих на задачу о построении напряженных состояний с большим показателем изменяемости. (Например, при рассмотрении задач пологих оболочек, оболочек нулевой гауссовой кривизны, оболочек, не имеющих особенностей, при рассмотрении задач о построении простого краевого эффекта и др.).

Приведенные выше проблемы и задачи заимствованы из арсенала теории изотропных оболочек, и поэтому все они в случае анизотропных оболочек нуждаются в коррективах. Дело в том, что анизотропия и слоистость оболочки настолько действенны, что вынудят внести коррективы не только в формулировку задач, но зачастую и в определения. Например, в случае пологой цилиндрической оболочки необходимо уточнить определение „не слишком длинная оболочка"; или, например, надо уточнить формулы асимптотического представления интегралов исходных дифференциальных уравнений

$$\sigma = k^q \psi(\alpha, \beta, k)\, e^{k\omega(\alpha, \beta, k)}, \qquad \psi = \psi_0 + \frac{1}{k}\psi_1 + \frac{1}{k^2}\psi_2 + \cdots, \tag{13}$$

так как здесь показатель изменяемости будет функцией не только относительной толщины, но и физико-механических характеристик материала оболочки [13, 6].

Нелинейная теория анизотропных слоистых оболочек. Этот раздел теории анизотропных слоистых оболочек начал развиваться лишь в последние годы. Поэтому полученные здесь результаты несколько ограничены и, как правило, на основании нелинейной теории изотропных оболочек, обобщают результаты линейной теории анизотропных слоистых оболочек на случай нелинейных задач.

На сегодня в основном завершено построение исходных соотношений и уравнений на уровне нелинейной теории изотропных оболочек Кармана-Власова [20, 35—39].

Наиболее полно изучены уравнения приближенной теории пологих оболочек

$$\begin{aligned} &L_1(D_{ik}, K_{ik})\, w - L_3(C_{ik}K_{ik})\, \varphi + L_5\varphi w + \nabla_r \varphi = Z, \\ &L_2(C_{ik})\, \varphi + L_4(C_{ik}, K_{ik})\, w + L_6 ww - \nabla_r w = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

которые интегрированы лишь в случае ортотропной оболочки, при этом использованы приближенные методы интегрирования. Были использованы как различные варианты метода последовательных приближений и метода малого параметра (метод возмущений), так и прямые методы типа Ритца и Бубнова-Галеркина. Однако, до сих пор нет исследований, посвященных обоснованию применения этих методов в случае анизотропных оболочек. Надо полагать, что и здесь анизотропия внесет свои коррективы.

Пожалуй, было бы весьма эффективным применение функционального анализа для исследования общих особенностей и обоснования применения приближенных и прямых методов в нелинейной теории анизотропных оболочек. Здесь напрашивается обобщение большой серии работ в этой области, выполненных по теории изотропных оболочек [40, 41], на случай анизотропных оболочек.

Наконец, отметим необходимость постановки исследований по нелинейной теории подкрепленных и конструктивно анизотропных слоистых оболочек. В связи с этим, не анализируя ее значения и фактического места в общей теории оболочек, отметим исследования гофрированных мембран и оболочек [42, 43], теория которых может сыграть важную роль при построении нелинейной теории подкрепленных и конструктивно анизотропных оболочек.

Вопросы устойчивости и колебаний анизотропных слоистых оболочек. Задачи устойчивости и свободных колебаний анизотропных слоистых оболочек, по сути дела, как и в случае изотропных оболочек, сводятся к определению собственного значения однородной системы дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями.

Вопросы устойчивости ортотропных оболочек были предметом исследования уже четверть века тому назад [28, 39]. В этих работах, исходя из приближенных уравнений локальной устойчивости, рассмотрены некоторые задачи устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек в линейной постановке.

В последующем задачи устойчивости ортотропных цилиндрических, сферических и конических оболочек, при различных условиях закрепления краев и нагружения, были рассмотрены многими авторами [44—47]. Из этой большой серии работ наибольший интерес представляют те, в которых рассматриваются различные варианты совместного действия различных типов нагрузок. Дело в том, что в этих случаях ярче всего сказывается влияние анизотропии на критические параметры задачи.

Как и в теории устойчивости изотропных оболочек, большой интерес представляют задачи устойчивости анизотропных оболочек в геометрически нелинейной постановке [49—51]. Эти исследования дали возможность определить нижние критические значения внешней нагрузки, то есть величину нагрузки, соответствующую нижней границе устойчивых равновесных изогнутых форм оболочки.

Исследование устойчивости ортотропной слоистой оболочки в большом привело к интересным результатам [108]. Установлено, что, в отличие от однородных и относительно срединной поверхности симметрично неоднородных (симметрично собранных слоистых) оболочек, в общем случае неоднородной по толщине (произвольно слоистой) оболочки, потеря устойчивости в большом возможна без „хлопка". Показано, что соответствующим выбором типа неоднородности (слоистости) можно добиться уменьшения склонности оболочки к „хлопку". Указывается возможность потери устойчивости неоднородной пластинки с „хлопком".

Приведенные выше исследования относятся лишь к ортотропным оболочкам. Несмотря на то, что уравнения локальной устойчивости оболочек в общем случае анизотропии были написаны еще в 1947—48 годах [9, 10], на сегодня мы не имеем ни одного исследования статической устойчивости какой-либо оболочки в общем случае анизотропии. Мы считаем, что эти исследования весьма важны как с точки зрения общей теории, так и с точки зрения приложений.

Совершенно не исследованы вопросы устойчивости анизотропных оболочек, ослабленных отверстиями (малыми и большими).

Большой интерес представили бы исследования устойчивости анизотропных оболочек при ударном и динамическом нагружениях.

Несмотря на наличие некоторого количества интересных работ по устойчивости конструктивно анизотропных оболочек, проблему устойчивости анизотропных оболочек с дискретно расположенными ребрами жесткости надо считать не разрешенной и весьма актуальной.

Мы ждем обобщения исследований [52, 53], по послекритическому поведению изотропных оболочек, на случай анизотропных слоистых оболочек.

Безусловно интересным является разработка методов нахождения форм потери устойчивости, в особенности в общем случае анизотропии.

Мы хотели бы обратить внимание на задачи устойчивости и послекритического поведения анизотропных слоистых оболочек с начальными несовершенствами. Эти несовершенства, как и следует ожидать, будут не только геометрическими, но и физико-механическими и могут внести существенно новые положения в теорию устойчивости оболочек с начальными механико-геометрическими несовершенствами.

Уравнения колебаний анизотропных оболочек были записаны в 1947—48 годах [9, 10]. В последующем рассмотрены конкретные задачи по определению частоты свободных колебаний ортотропных сферических и конических оболочек в линейной [54—57] и нелинейной [24, 58] постановках при различных типах граничных закреплений. Рассмотрены задачи вынужденных нелинейных колебаний ортотропных сферических и конических оболочек [58].

Исследование вынужденных колебаний весьма пологих ортотропных слоистых оболочек [59] привело к любопытному факту, заключающемуся в том, что в нелинейных вынужденных колебаниях оболочек, кроме обычного резонанса, возможны резонансы на половинных и кратных частотах.

Первые задачи динамической устойчивости ортотропных оболочек в линейной постановке были решены в 1949—50 годах [60, 61]. В этих работах, обычным образом [62], задача определения областей динамической неустойчивости ортотропной цилиндрической панели была сведена к уравнению Матье.

Большая серия работ [63—65, 108] посвящена нелинейным задачам динамической устойчивости анизотропных слоистых оболочек. Определены критические частоты и амплитуды установившихся резонансных колебаний. Указывается возможность существования резонансных колебаний для частот, меньших критических. Приводятся соотношения для определения нижних критических частот. Показано, что нет принципиальной разницы в послекритическом поведении ортотропных произвольно неоднородных по толщине пластинок и оболочек. Показано также, что при определенной неоднородности строения пластинки по толщине возможны резонансные колебания для частот, меньших критических (это характерно, вообще говоря, лишь для оболочки). Доказана необходимость учета невозмущенных деформаций при определении областей параметрического резонанса [65].

Для ясности укажем, что в цитированных работах [54—65], как правило, основным аппаратом исследования являлся вариационный метод Бубнова-Галеркина.

Здесь мы считаем, что основными предметами исследований должны стать: задачи динамической устойчивости оболочек в общем случае анизотропии; задачи динамической устойчивости анизотропных оболочек, подкрепленных дискретно расположенными ребрами. Указанные задачи должны быть решены как в линейной, так и нелинейной постановках.

Некоторые работы последних лет [66—71] посвящены исследованию устойчивости анизотропных слоистых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Во всех этих работах, обычным образом [72], устанавливаются зависимости между формой колебания и скоростью флаттера, в случае же нелинейной задачи—также и связь между амплитудой установившихся флаттерных колебаний и скоростью потока.

Проанализирована [67] зависимость критической скорости флаттера от числа волн в окружном направлении ортотропной слоистой круговой цилиндрической оболочки конечной длины. Показано, что, в отличие от однородных изотропных оболочек, критическое число волн в окружном направлении существенно зависит от механических характеристик материала слоев и от типа слоистости оболочки, то есть от отношений типа E_{12}/E_{11} и δ_i/δ_2.

На примере ортотропной цилиндрической панели [66, 69] показана возможность существования флаттерных колебаний для скоростей, меньших критических. Определены нижние и верхние критические скорости флаттера и амплитуды установившихся колебаний. Указано, что, в пределах изменения скорости от нижней критической до верхней, невозмущенное состояние оболочки устойчиво в малом, а при больших возмущениях устанавливается изогнутое устойчивое состояние.

Особо следует отметить исследование [68], посвященное задаче устойчивости бесконечно длинной анизотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Как частный вариант общего случая анизотропии, полагается, что оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки. Показано, что критическая скорость флаттера существенным образом зависит как от ориентации главных направлений упругости материала, так и от отношений типа E_{ik}/E_{11}.

Здесь следует отметить, что исследования в области флаттера анизотропных оболочек, по сути дела, только начаты, и в этой области еще очень многое должно быть сделано.

Температурная задача. Ползучесть. Пластичность. Этим трем, безусловно важным, вопросам теории анизотропных слоистых оболочек посвящается весьма малое количество исследований.

Работы, посвященные температурной задаче теории анизотропных слоистых оболочек [23, 35, 73, 74], по сути дела, обобщают исследования термоупругой задачи изотропных оболочек на случай ортотропных слоистых оболочек. Исходя из классической постановки задачи термоупругости [75], рассматриваются стационарные задачи термоупругости различных типов ортотропных слоистых оболочек. Более подробно исследованы оболочки вращения и пологие оболочки.

В последнее время начали обращать особое внимание на задачи термоупругости анизотропных оболочек в предположении изменяемости упругих свойств материала оболочки от температуры [74]. Эти исследования очень важны, тем более, когда рассматриваются задачи устойчивости и колебаний оболочек, находящихся в поле действия высоких температур, изменяющихся во времени [76—78].

Сделана попытка [23] обобщения термоупругой задачи ортотропных оболочек на случай круговой цилиндрической оболочки, изготовленной так, что главные направления упругости ортотропного материала оболочки не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки. Начатое исследование должно быть продолжено с целью разработки основных положений термоупругости оболочек в общем случае анизотропии.

Безусловно будут интересны нестационарные задачи термоупругости анизотропных слоистых оболочек и проблема термического удара в анизотропных оболочках. Особый интерес представят задачи термопластичности анизотропных слоистых оболочек.

Разработана общая теория несущей способности и ползучести однослойных анизотропных оболочек при наличии сильных градиентов высоких температур [79]. Приведены исходные уравнения оболочки в тензорной форме в случае вязкого релаксирующего и наследственного материала.

Рассмотрено влияние линейной ползучести материала оболочки на деформированное и напряженное состояние ортотропной оболочки. В частности, рассмотрены некоторые конкретные задачи цилиндрических и пологих оболочек, а также симметрично нагруженных оболочек вращения. Рассмотрен простой краевой эффект в ортотропных цилиндрических и сферических оболочках [80—82] с учетом линейной ползучести.

Исследователями ползучести ортотропных оболочек совершенно не затрагивались задачи оболочек с учетом нелинейной ползучести материала. Не исследованы также вопросы ползучести оболочек в общем случае анизотропии. Этот случай безусловно интересен как при линейной, так и при нелинейной ползучести материала оболочки.

Исследования ползучести оболочек в общем случае анизотропии, пожалуй, надо начать с рассмотрения задачи ползучести оболочки, изготовленной из ползучего ортотропного материала, главные направления упругости и ползучести которого не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки.

Сделаны первые попытки разработки теории анизотропных оболочек, деформирующихся за пределами упругости [83, 84]. Рассмотрены вопросы жестко-пластического анализа, упруго-пластического равновесия ортотропных слоистых оболочек.

Разработка теории анизотропных слоистых оболочек, деформирующихся за пределами упругости, представляет большой теоретический и практический интерес. Однако, несмотря на это, исследования в указанной области весьма ограничены.

Новые теории анизотропных оболочек. До сих пор предметом наших рассмотрений были различные аспекты классической теории анизотропных слоистых оболочек, построенной на основе гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом. Было указано, что классическая теория в случае существенной анизотропии материала оболочки или при достаточно большой приведенной относительной толщине нуждается в коррективах.

Все сказанное вызвало необходимость разработать теорию анизотропных оболочек без использования гипотезы недеформируемых нормалей.

Вопрос разработки теории изотропных оболочек без гипотезы недеформируемых нормалей по тому или иному поводу интересовал многих исследователей [85—93]. Все эти работы, посвященные уточненным теориям изотропных пластин и оболочек, здесь не будут обсуждаться.

Теория анизотропных оболочек без гипотезы недеформируемых нормалей стала темой исследования лишь недавно и в основном развивалась по следующим направлениям.

Первое направление, развитое в работах [13, 94—97], базируется на следующих предположениях:

а) расстояния по нормали (γ) между двумя точками оболочки до и после деформации остаются неизменными;

б) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, могут быть пренебрежены по сравнению с прочими напряжениями;

в) при определении деформаций сдвига $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ считается, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений ($\tau^0_{\alpha\gamma}$, $\tau^0_{\beta\gamma}$), найденных по теории, базирующейся на гипотезе недеформируемых нормалей.

Укажем, что второе допущение (б), которое по сути дела вносит незначительные погрешности, зачастую не используется [13].

Принятые выше предположения таковы, что вносят коррективы лишь в правую часть основных дифференциальных уравнений задачи, где наряду с обычными грузовыми членами появляются члены, зависящие от $\tau^0_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma}$, то есть от решений классической теории. Однородные уравнения этой теории ничем не отличаются от однородных уравнений классической теории анизотропных оболочек и могут быть записаны как в перемещениях, так и с помощью функции напряжений. Несколько изменяются соотношения упругости, в них появляются члены, зависящие от $\tau^0_{\alpha\gamma}$ и $\tau^0_{\beta\gamma}$, например, для ортотропной оболочки

$$M_1 = D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + \frac{h^2}{10}\left(D_{11}a_{55}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha} + D_{12}a_{44}\frac{\partial\psi_0}{\partial\beta}\right) +$$
$$+ A_1\frac{h^3}{120}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi_0}{\partial\beta}\right) \quad \text{и т. д.} \tag{15}$$

Если полагать, что классическая теория является первым приближением к точной теории, то здесь по сути дела имеем последующее приближение [13].

В связи с этим направлением исследований следует отметить, что теория [98], в которой в целом удерживаются величины порядка h^2/L^2, подтверждает предположение о том, что рассмотренная здесь уточненная теория анизотропных оболочек улавливает главную часть поправки к классической теории.

Основы этой теории были использованы для построения геометрически нелинейной теории ортотропных оболочек [96], а также для построения теории двухслойных и, пожалуй впервые, несимметрично собранных трехслойных ортотропных оболочек [94, 95, 97].

В связи с упоминанием трехслойных оболочек, отметим, что на сегодня накопилось и продолжает накапливаться большое количество разнообразных исследований, посвященных разработке различных вариантов теории трехслойных пластин и оболочек [1]. Эти варианты теории, отличаясь в некоторых редких случаях в принципе, а, как правило, лишь в мелочах, создают невероятную пестроту „теорий". Мы считаем, что необходимы солидные исследования, посвященные классификации этих теорий с указанием их точности и пределов применимости. Пожалуй, такой анализ должен быть выполнен с позиций трехмерной задачи теории упругости, без каких-либо упрощающих предположений.

Второе направление, развитое в работах [13, 99—102], базируется на следующих предположениях:

а) расстояния по нормали между двумя точками оболочки после деформации остаются неизменными;

б) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ или соответствующие деформации $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки меняются по заданному закону, то есть

$$\tau_{\alpha\gamma}=f_1(\gamma)\varphi(\alpha, \beta)+\frac{\gamma}{h}(X^+ + X^-)+\frac{X^+ - X^-}{2},$$
$$\tau_{\beta\gamma}=f_2(\gamma)\psi(\alpha, \beta)+\frac{\gamma}{h}(Y^+ + Y^-)+\frac{Y^+ - Y^-}{2}, \tag{16}$$

где $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ — искомые функции, характеризующие величины поперечных сдвигов; $f_i(\gamma)$ — функции, представляющие законы изменения поперечных касательных напряжений.

Теория, построенная на основании этих предположений, существенно отличается от классической теории анизотропных оболочек. Основное отличие заключается в том, что здесь порядок исходных дифференциальных уравнений повышается и доходит до десяти, количество независимых граничных условий на каждом краю оболочки становится равным пяти, наряду с искомыми перемещениями u, v, w появляются новые искомые функции φ и ψ.

Эта теория была использована при рассмотрении задач прочности, статической и динамической устойчивости и колебаний различных ортотропных и трансверсально изотропных оболочек, в линейной и нелинейной постановках [99—105]. На основании этой теории рассмотрена также температурная задача теории круговой цилиндрической оболочки, когда физико-механические характеристики оболочки зависят от температуры [106].

Рассмотренная здесь теория очень гибка и существенно реагирует на изменения отношений типа E_{ii}/E_{33}, E_{ii}/G_{i3} и т. д.

Показано, что с увеличением подъемистости оболочки влияние поперечных сдвигов на напряженное и деформированное состояние оболочки уменьшается; указывается, что напряженное и деформированное состояние оболочки существенно зависит от некоторой относительной приведенной толщины, которая зависит как от геометрии оболочки, так и от физико-механических характеристик материала оболочки (9).

Установлено, что в задачах статической устойчивости [103—105] с увеличением относительной приведенной толщины значение критической силы уменьшается по сравнению с соответствующей критической силой классической теории [107]. Та же самая картина наблюдается и при рассмотрении колебаний ортотропной оболочки [103, 104], то есть с увеличением относительной приведенной толщины частота свободных колебаний уменьшается по сравнению с соответствующей частотой, найденной по классической теории. В частности, погрешность классической теории значительно увеличивается, когда рассматриваются высшие формы колебаний.

По новым теориям рассмотрены также задачи динамической устойчивости ортотропной цилиндрической панели и трансверсально изотропной сферической оболочки [104, 105], показано, что с увеличением относительной приведенной толщины оболочки расширяются области динамической неустойчивости.

Рассмотрены задачи устойчивости бесконечно длинной трансверсально изотропной круговой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа с учетом поперечных сдвигов и нормального напряжения σ_γ [66]. Исследован нелинейный флаттер прямоугольной в плане пологой ортотропной оболочки с учетом лишь поперечных сдвигов [69]. Показано, что учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению критической скорости и увеличению амплитуды установившихся колебаний флаттера заданной формы.

За исключением одной работы [98], нет исследований, посвященных установлению точности и пределов применимости указанных здесь двух теорий, которые по сути дела уточняют лишь „внутреннюю" задачу теории анизотропных оболочек [91, 92].

Широкое применение анизотропных материалов в современной технике настойчиво требует создания совершенной математической теории оболочек, изготовленных из существенно анизотропных материалов. Такая теория дала бы возможность установить пределы применимости и точности технических теорий анизотропных оболочек.

Мы считаем весьма важным постановку прецизионных экспериментов в области анизотропных слоистых оболочек.

Здесь мы достаточно подробно остановились лишь на тех двух новых направлениях, которые по своему духу ближе всего автору и специально посвящены разработке теории анизотропных оболочек без гипотезы недеформируемых нормалей.

Нам кажется интересным обобщение результатов различных теорий изотропных оболочек, не опирающихся на гипотезу недеформируемых нормалей [85—93, 109], на случай анизотропных оболочек. Примером такого обобщения может служить исследование [110], где результаты работы [111] обобщаются на случай анизотропных пластинок.

Настоящий обзор не претендует на полноту ни с точки зрения охвата выполненных работ, ни с точки зрения выдвижения перспективных направлений дальнейших исследований. Пожалуй, наш обзор должен быть рассмотрен, как некоторое дополнение к ранее опубликованным обзорам [1, 112—116].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 III 1964

Ս. Ա. Համբարձումյան

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը ակնարկային է, բայց այստեղ հատուկ ուշադրության է արժանացել անիզոտրոպ շերտավոր թաղանթների տեսության զարգացման հեռանկարների հարցը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куршин Л. М.* Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. Расчет пространственных конструкций. Сборн. ст., вып. VII. Госстройиздат, М., 1962.
2. *Штаерман И. Я.* К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. Известия Киевск. политехн. и сельхоз. ин-та, 1924.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. Гостехиздат, М., 1935.
4. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М., 1949.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1951.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
7. *Huber M. T.* Teorja plyt. Lwow, 1921.
8. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, М., 1957.
9. *Амбарцумян С. А.* Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия естеств. наук, № 9, 1947.
10. *Амбарцумян С. А.* К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, **12**, в. 1, 1948.
11. *Амбарцумян С. А.* Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, **8**, № 5, 1948.
12. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, **6**, № 3, 1953.
13. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
14. *Висарион В., Стэнеску Кр.* Исследование квазиинвариантов статико-геометрической аналогии для тонких упругих оболочек. ПММ, **25**, в. 1, 1961.
15. *Амбарцумян С. А.* Безмоментная теория анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, **1**, № 6, 1948.
16. *Мовсисян Л. А.* О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **11**, № 4, 1958.
17. *Амбарцумян С. А.* Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения. ДАН АрмССР, **9**, № 5, 1948.
18. *Амбарцумян С. А.* Расчет слоистых оболочек вращения. ДАН АрмССР, **11**, № 2, 1949.
19. *Амбарцумян С. А.* Длинные анизотропные оболочки вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, **4**, № 6, 1951.
20. *Бурмистров Е. Ф.* Симметричный изгиб ортотропных оболочек вращения с учетом больших прогибов. Инж. сб., **24**, 1956.
21. *Бурмистров Е. Ф.* Симметричная деформация оболочки, мало отличающейся от цилиндрической. ПММ, **8**, в. 4, 1949.
22. *Пештмалджян Д. В.* К расчету симметрично нагруженных слоистых анизотропных оболочек вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **10**, № 2, 1957.
23. *Мовсисян Л. А.* К расчету анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 4, 1959.

24. *Бурмистров Е. Ф.* Симметричная деформация конструктивно-ортотропных оболочек вращения. Изд-во Саратовского ун-та, 1962.
25. *Clark R. A.* On the theory of thin elastic toroidal shells. J. Math. Phys., **29**, 1950.
26. *Naghdi P. M., De Silva C. N.* Deformation of elastic ellipsoidal shells of revolution. Proc. second U. S. Congr. Appl. Mech., 1955.
27. *Амбарцумян С. А.* К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, подкрепленных поперечными ребрами. Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1955.
28. *Муштари Х. М.* Некоторые обобщенные теории тонких оболочек. ПММ, **2**, в. 4, 1939.
29. *Христенко А. С.* О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 3, 1962.
30. *Амбарцумян С. А.* Расчет симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами. ДАН АрмССР, **21**, № 4, 1955.
31. *Schnell W.* Krafteinleitung in versteifte kreiszylinderschalen, Teil 1, Die orthotrope Schale. Z. Flugwiss, **3**, № 12, 1955.
32. *Schnell W.* Krafteinleitung in versteifte kreiszylinderschalen, Teil 2, Die Schale mitendlich vielen Soanten. Z. Flugwiss, **5**, № 1, 1955.
33. *Амбарцумян С. А.* К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек. ПММ, **18**, в. 3, 1954.
34. *Амбарцумян С. А.* О пределах применимости некоторых гипотез теории тонких цилиндрических оболочек. Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1954.
35. *Бурмистров Е. Ф.* Симметричный изгиб неоднородных и однородных ортотропных оболочек вращения с учетом больших прогибов и неравномерного температурного поля. Инж. сб., **27**, 1960.
36. *Reissner E.* Symetric bending of shallow shells of revolution. J. of Math. and Mechanics, **7**, № 2, 1958.
37. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
38. *Бурмистров Е. Ф.* Расчет пологих ортотропных оболочек с учетом конечных деформаций. Инж. сб., **22**, 1955.
39. *Муштари Х. М.* Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению устойчивости упругих анизотропных оболочек. Известия Казанского физ.-мат. общества, **11**, 1938.
40. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории оболочек. ПММ, **20**, в. 4, 1956.
41. *Ворович И. И.* Погрешность прямых методов в нелинейной теории оболочек. ДАН СССР, **122**, № 2, 1958.
42. *Феодосьев В. И.* О больших прогибах и устойчивости круговой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ, **9**, в. 5, 1945.
43. *Вейнберг Д. В., Сазанов Р. М., Семенов П. И.* Расчет гофрированных оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 7, 1962.
44. *Григолюк Э. И.* Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 3, 1955.
45. *Nash W. A.* General instability of ringreinforced cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure. Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1955.
46. *Лукаш П. А.* Об устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек. Научн. докл. высш. школы (строительство), № 2, 1958.
47. *Даревский В. М., Кукуджанов С. Н.* Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки при кручении с внутренним давлением. ДАН СССР, **123**, № 1, 1958.
48. *Кармишин А. В.* Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при осевом сжатии. Труды Гос. союзн. ин-та, в. 3, 1953.
49. *Александровский С. В.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 3, 1955.

50. *Ленько О. Н.* Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми силами и внешним давлением. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 5, 1959.
51. *Теребушко О. И.* К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических подкрепленных оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 7, 1962.
52. *Алумяэ Н. А.* Дифференциальные уравнения состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ, **13**, в. 1, 1949.
53. *Алумяэ Н. А.* Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек. ПММ, **14**, в. 1, 1950.
54. *Сахаров И. Е.* Уравнения колебаний пологих сферических и конических оболочек. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 5, 1960.
55. *Песенникова Н. К., Сахаров И. Е.* Частоты свободных колебаний основного тона сферических оболочек. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 2, 1961.
56. *Кутникова В. П., Сахаров И. Е.* Частоты собственных колебаний основного тона ортотропных пологих конических оболочек. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 4, 1961.
57. *Ониашвили О. Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР, 1957.
58. *Бурмистров Е. Ф.* Нелинейные поперечные колебания ортотропных оболочек вращения. Инж. сб., **26**, 1958.
59. *Багдасарян Ж. Е., Гнуни В. Ц.* Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 1, 1961.
60. *Марков А. Н.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. ПММ, **13**, в. 2, 1949.
61. *Хачатурян Т. Т.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. Сб. трудов ЕрПИ, № 4, 1950.
62. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
63. *Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 1, 1960.
64. *Гнуни В. Ц.* О параметрически возбуждаемых колебаниях слоистых анизотропных гибких оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 3, 1962.
65. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конф. по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
66. *Багдасарян Ж. Е.* Некоторые задачи устойчивости анизотропных оболочек и пластинок в сверхзвуковом потоке газа. Автореферат, 1963.
67. *Багдасарян Ж. Е.* Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки в потоке газа. Труды конф. по теории пластин и оболочек, Ереван, 1964.
68. *Багдасарян Ж. Е.* Устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 6, 1962.
69. *Багдасарян Ж. Е.* Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 1, 1963.
70. *Librescu L.* Vibratiile structurilor elastice subtiri de forma cilinadrica circulara, plasate intr-un curent fluid supersonic. Studii si cercetari de mecanica aplicata, Acad. RPR, 12, 1, 1962.
71. *Librescu L.* Vibrations of non-homogeneous circular cylindrical shells in supersonic fluid flow. Revue de mecanique appliquée. Acad. RPR, **5**, 6, 1961.
72. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
73. *Амбарцумян С. А.* Температурные напряжения в слоистых анизотропных обо-

лочках. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естест. и техн. наук, **5**, № 6, 1952.
74. *Дургарьян С. М.* К температурному расчету тонких ортотропных оболочек вращения. Инж. ж., в. 3, 1962.
75. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, 1962.
76. *Амбарцумян С. А.* Об одной задаче колебания ортотропной пластинки, находящейся в поле действия высоких температур. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 4, 1963.
77. *Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М.* О колебаниях ортотропной пологой оболочки, находящейся в переменном температурном поле. ДАН АрмССР, **38**, №2, 1964.
78. *Дургарьян С. М.* К устойчивости нагруженной нагреваемой гибкой ортотропной пластинки с начальной погибью. ДАН АрмССР, **38**, № 5, 1964.
79. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Ползучесть и несущая способность оболочек. Научное сообщение „ЦНИИСК", в. 13, 1960.
80. *Прокопович И. Е.* О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. Инж. сб., **24**, 1956.
81. *Григорян Г. С.* К расчету слоистых ортотропных оболочек с учетом ползучести материала. Сб. трудов ЕрПИ, юбилейный выпуск, 1961.
82. *Прокопович И. Е.* О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в системах, состоящих из неоднородных элементов. Научн. доклады высш. школы (строительство), № 1, 1958.
83. *Микеладзе М. Ш.* Статика анизотропных пластичных оболочек. Изд-во АН Груз. ССР, 1963.
84. *Савчук А.* О теории анизотропных пластических оболочек и пластинок. Механика, ИЛ, № 3, 1961.
85. *Кильчевский Н. А.* Обобщение современной теории оболочек. ПММ, **2**, в. 4, 1939.
86. *Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М.* О погрешности гипотез Кирхгоффа в теории оболочек. ПММ, **7**, в. 5, 1943.
87. *Green A., Zerna W.* The equilbrium of thin elastic shells. Quart. J. Mech. Appl. Math., **3**, 1950.
88. *Reissner E.* Stress strain relations in the theory of thin elastic shells, J. Math., Phys., **31**, 1952.
89. *Векуа И. Н.* Об одном методе расчета призматических оболочек. Труды Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе, **21**, 1955.
90. *Nagdi P. M.* On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., **14**, № 4, 1957.
91. *Green A. E.* On the linear theory of thin elastic shells. Proceedings of the Royal Society, A 266, № 1325, 1962.
92. *Green A. E.* Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proceedings of the Royal Society, A 269, № 1339, 1962.
93. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, **27**, в. 4, 1963.
94. *Амбарцумян С. А.* К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1957.
95. *Амбарцумян С. А.* О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **10**, № 2, 1957.
96. *Амбарцумян С. А. Пештмалджян Д. В.* К нелинейной теории пологих ортотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 1, 1958.
97. *Хачатрян А. А.* К расчету трехслойной ортотропной оболочки. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 5, 1959.
98. *Муштари Х. М., Терегулов И. Г.* Теория пологих оболочек средней толщины. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 6, 1959.

99. *Амбарцумян С. А.* К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, **22**, в. 2, 1958.
100. *Ambartsumyan S. A.* On the theory of anisotropic shells and plates. Proceedings of an IMTAM. Symposium held in Warsaw sept. 1958, 1960.
101. *Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В.* К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 1, 1959.
102. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, **24**, в. 2, 1960.
103. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной цилиндрической панели. ДАН АрмССР, **30**, № 1, 1960.
104. *Хачатрян А. А.* Об устойчивости и колебаниях трансверсально изотропной сферической оболочки. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **8**, № 4, 1960.
105. *Хачатрян А. А.* Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при некоторых нагрузках. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 5, 1960.
106. *Дургарьян С. М.* К осесимметричной температурной задаче ортотропной цилиндрической оболочки. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961.
107. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
108. *Гнуни В. Ц.* Некоторые нелинейные задачи статической и динамической устойчивости анизотропных неоднородных оболочек и пластинок. Автореферат, 1963.
109. *Кильчевский Н. А.* Основы аналитической механики оболочек. Изд-во АН УкрССР, 1963.
110. *Girkman K.* Flächentragwerke. Wien, Springer-Verlag, V, 1959.
111. *Reissner E.* On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., **5**, № 1, 1947.
112. *Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И.* О математической теории равновесия упругих оболочек (обзор работ, опубликованных в СССР). ПММ, **11**, в. 5, 1947.
113. *Naghdi P. M.* A survey of recent progress in the theory of elastic shells. Appl. Mech. Reviews, **9**, № 9, 1956.
114. *Вольмир А. С.* Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 4, 1958.
115. *Nash W. A.* Recent advances in the buckling of thin shells. Appl. Mech. Reviews, **13**, № 3, 1960.
116. *Гольденвейзер А. Л.* Развитие теории упругих тонких оболочек. Труды Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладн. механике. Изд-во АН СССР, 1962.
117. *Саркисян В. С.* К решению задачи изгиба анизотропных (неортотропных) пластин. ДАН АрмССР, **37**, № 3, 1963.
118. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, **27**, в. 6, 1963.