

М. Б. Балк

О бианалитических функциях с неизолированными a -точками

1. Функция $f(z)$ называется бианалитической в некоторой области D комплексной z -плоскости, если она представима в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \bar{z} \cdot \psi(z), \quad (1)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, аналитические в D .

Функция (1) называется бианалитической в точке, если она бианалитична в какой-либо области, содержащей эту точку, и называется бианалитической на множестве E , если она бианалитична в каждой точке этого множества.

Как известно, точка z_0 называется a -точкой функции $f(z)$, если $f(z_0) = a$. Мы будем точку z_0 называть неизолированной a -точкой бианалитической функции $f(z)$, если, во-первых, $f(z)$ бианалитична в некоторой окрестности $\delta \{|z - z_0| < \rho\}$ точки z_0 и, во-вторых, z_0 является предельной точкой для некоторого множества a -точек функции $f(z)$.

Аналитическая функция $f(z)$, отличная от константы, принимает каждое свое значение a изолированно: если $f(z_0) = a$, то существует вокруг z_0 такая достаточно малая окрестность $|z - z_0| < \rho$, что при $0 < |z - z_0| < \rho$ $f(z) \neq a$.

Совершенно иначе обстоит дело с бианалитическими функциями: существуют такие бианалитические функции, отличные от константы, которые принимают некоторые (или даже все) свои значения неизолированно. Такова, например, функция $\bar{z} \cdot z$ (принимает изолированно — только в точке $z = 0$ — значение 0; и неизолированно — на окружности $|z| = \sqrt{a}$ — любое положительное значение a); такова функция $z + \bar{z}$ (принимает любое вещественное значение a неизолированно — на целой прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}a$).

Легко проверить, что всякая бианалитическая функция $V(z)$, осуществляющая вырожденное отображение (то есть такая, которая переводит некоторую область в множество без внутренних точек),

имеет неизолированные a -точки; более того, если $V(z) \neq \text{const}$ (такая запись здесь и в дальнейшем означает: $V(z)$ не есть константа), то множество значений a , принимаемых этой функцией неизолированно, имеет мощность континуума. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться формулами (17)–(18) из статьи [2].

Пусть вырожденная бианалитическая функция $V(z)$ (то есть осуществляющая вырожденное отображение) имеет неизолированный нуль z_0 , функция $A(z)$ — произвольная аналитическая в окрестности точки z_0 , a — произвольная константа; тогда бианалитическая функция

$$B(z) = A(z) \cdot V(z) + a \quad (2)$$

будет, очевидно, принимать неизолированно значение a .

Интересно выяснить: существуют ли еще какие-то другие бианалитические функции (кроме вырожденных или получаемых из вырожденных с помощью формул вида (2)), имеющие неизолированные a -точки?

Если функция $f(z)$ принимает на некотором множестве значение a , то функция $F(z) = f(z) - a$ принимает на том же множестве значение 0. Поэтому достаточно изучить бианалитические функции, имеющие неизолированные нули.

Можно проверить, что для вырожденной бианалитической функции множество неизолированных нулей может заполнить только одну из следующих линий: окружность, прямую, луч, логарифмическую спираль.

Любопытно выяснить: существуют ли бианалитические функции, нули которых заполняют какую-либо другую линию, например, параболу?

2. Мы говорим, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к точке z_0 вдоль прямой

$$z = z_0 + te^{i\alpha} \quad (-\infty < t < \infty, \text{Im } \alpha = 0), \quad (3)$$

если члены этой последовательности возможно представить в виде

$$z_n = z_0 + t_n \exp(i\alpha_n), \quad (4)$$

где t_n и α_n вещественны и при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow 0$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha$.

Мы говорим, что множество E сгущается к точке z_0 вдоль некоторой прямой (2), если в E содержится последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к z_0 вдоль этой прямой.

Замечание 1. Если z_0 — неизолированная a -точка бианалитической функции $f(z)$, отличной от тождественной константы, то должна существовать единственная прямая, вдоль которой множество E всех a -точек функции $f(z)$ сгущается к точке z_0 .

Этот факт является тривиальным следствием из теоремы единственности для полианалитических функций (см. [2], подробное доказательство приведено в [3]).

Если бы множество E сгущалось к точке z_0 вдоль двух (или более) различных прямых, то в силу этой теоремы единственности

из совпадения на E двух бианалитических функций $f(z)$ и тождественной константы a — следовало бы тождество $f(z) \equiv a = \text{const.}$

Если гомеоморф Γ некоторого интервала (α, β) может быть задан с помощью аналитической функции $z = \lambda(t) = x(t) + iy(t)$ ($\alpha < t < \beta$), причем $\lambda'(t) \neq 0$ на (α, β) , то Γ будем называть *открытой простой правильной аналитической дугой* (ОППАД). Случаи $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$ не исключаются.

Замечание 2. Если две функции $f(z)$ и $g(z)$, бианалитические на некоторой ОППАД Γ , принимают равные значения на некотором множестве E , принадлежащем дуге Γ и имеющему хотя бы одну предельную точку на Γ , то $f(z) \equiv g(z)$ на *всей* дуге Γ .

Для доказательства достаточно рассмотреть две функции: $F(t) \equiv f[\lambda(t)]$ и $G(t) \equiv g[\lambda(t)]$ на сегментах вида $[a, b]$, где $\alpha < a < b < \beta$. Функции $F(t)$ и $G(t)$ аналитичны в некоторой окрестности сегмента $[a, b]$. Применение к этим функциям классической теоремы единственности и приводит к доказательству замечания 2. Подробно доказательство (для более общего случая) изложено в [3].

3. Не предпринимая пока вопроса о существовании бианалитических функций, не представимых в виде (2), но имеющих неизолированные a -точки, докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для того, чтобы бианалитическая функция $B(z)$ имела в точке z_0 неизолированную a -точку, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$B(z) = a + \Psi(\zeta) \cdot [\theta(\zeta) - \text{Im} \zeta], \quad (5)$$

где $\zeta = (z - z_0)e^{-i\alpha}$, α — вещественная константа, $\Psi(\zeta)$ и $\theta(\zeta)$ аналитичны в точке $\zeta = 0$, причем $\theta(\zeta)$ совпадает с $\text{Im} \zeta$ на некоторой ОППАД, касающейся вещественной оси плоскости переменного ζ в точке $\zeta = 0$.

Доказательство. Достаточность условия теоремы очевидна. Докажем его необходимость. Можем считать, что $B(z) \neq \text{const.}$ Так как по условию точка z_0 — неизолированная a -точка функции $B(z)$, то существует такая последовательность $\{z_n\}$ a -точек функции $B(z)$, которая сходится к z_0 . В силу замечания 1 последовательность $\{z_n\}$ должна сходиться к z_0 вдоль некоторой (единственной) прямой. Пусть уравнение этой прямой $z = z_0 + te^{i\alpha}$ (α — вещественная константа, $-\infty < t < \infty$).

Перейдем к новому переменному ζ по формуле

$$z = z_0 + e^{i\alpha}\zeta. \quad (6)$$

Рассмотрим функцию

$$F(\zeta) = B(z) - a = B(z_0 + e^{i\alpha}\zeta) - a. \quad (7)$$

Эта функция бианалитична в некоторой окрестности δ точки $\zeta = 0$. Нулями $F(\zeta)$ являются точки

$$\zeta_n = (z_n - z_0)e^{-i\alpha} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Ясно, что $\zeta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что точка $\zeta = 0$ служит неизолированным нулем функции $F(\zeta)$. Числа ζ_n можно представить в виде

$$\zeta_n = t_n \exp(i\lambda_n), \quad (9)$$

где t_n и λ_n вещественны, причем при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow 0$ и $\lambda_n \rightarrow 0$. Функцию $F(\zeta)$ возможно в δ представить в виде

$$F(\zeta) = \varphi(\zeta) + \bar{\zeta} \cdot \psi(\zeta), \quad (10)$$

где $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — функции, аналитичные в δ .

Ясно, что ни одна из функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ не является тождественным нулем в δ . Поэтому существует достаточно малый кружок $d\{|\zeta| < \rho\}$, в котором $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ представимы в виде

$$\varphi(\zeta) = \zeta^m \varphi_1(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \zeta^p \psi_1(\zeta), \quad (11)$$

причем $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$ вовсе не обращаются в нуль при $|\zeta| < \rho$, а m и p — какие-то целые неотрицательные числа.

Покажем, что $m = p + 1$ и $\varphi_1(0)/\psi_1(0) = -1$. (12)

Почти все члены последовательности (8) (то есть все, кроме, возможно, конечного числа) удовлетворяют условиям

$$\zeta_n \neq 0, \quad |\zeta_n| < \rho.$$

Кроме того $\zeta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но $F(\zeta_n) = 0$, то есть

$$\zeta_n^m \varphi_1(\zeta_n) + \bar{\zeta}_n \zeta_n^p \psi_1(\zeta_n) = 0,$$

откуда

$$\zeta_n^{m-p-1} \frac{\varphi_1(\zeta_n)}{\psi_1(\zeta_n)} + \frac{\bar{\zeta}_n}{\zeta_n} = 0. \quad (13)$$

Второе слагаемое в (13) при $n \rightarrow \infty$ имеет предел 1. Модуль же первого слагаемого стремился бы к 0 при $m > p + 1$ и к ∞ при $m < p + 1$. Значит, $m = p + 1$. Из (13) при $n \rightarrow \infty$ найдем: $\frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)} = -1$.

В силу (10) — (13) возможно $F(\zeta)$ записать так:

$$F(\zeta) = \psi(\zeta) [\zeta \varphi_1(\zeta) / \psi_1(\zeta) + \bar{\zeta}]. \quad (14)$$

Функция $\varphi_1(\zeta)/\psi_1(\zeta)$ аналитична в d . Учитывая (12), можно на-

писать: $\varphi_1(\zeta)/\psi_1(\zeta) = -1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \zeta^{\nu}$ (b_{ν} — константы) (15)

$$F(\zeta) = \psi(\zeta) \left[\zeta \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \zeta^{\nu} - \zeta + \bar{\zeta} \right] = \Psi(\zeta) [\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta], \quad (16)$$

где

$$\Psi(\zeta) = 2i\psi(\zeta) \quad \text{и} \quad \Theta(\zeta) = \zeta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \zeta^{\nu-1}. \quad (17)$$

Используя (7), получим (5).

Остается еще показать, что равенство

$$\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta = 0 \quad (18)$$

имеет место на некоторой ОППАД Γ , касающейся оси $\text{Im } \zeta = 0$ в точке $\zeta = 0$.

Это очевидно, если $\Theta(\zeta) = 0$: тогда равенство (18) имеет место на всей вещественной оси плоскости переменного ζ . Пусть теперь $\Theta(\zeta) \neq 0$. Из (17) видно, что для $\Theta(\zeta)$ точка $\zeta = 0$ является нулем порядка $k \geq 2$. Поэтому $\Theta(\zeta)$ представима в виде

$$\Theta(\zeta) = b_{k-1}\zeta^k + b_k\zeta^{k+1} + \dots, \quad \text{где } b_{k-1} \neq 0, k \geq 2. \quad (19)$$

Так как $F(\zeta_n) = 0$, а почти для всех n $\psi(\zeta_n) \neq 0$, то в силу (16) — (17) почти для всех n $\Theta(\zeta_n) = \text{Im } \zeta_n$, то есть

$$\zeta_n^k (b_{k-1} + b_k \zeta_n + \dots) = t_n \sin \lambda_n, \quad (20)$$

$$\exp(ik\lambda_n) [b_{k-1} + o(\zeta_n)] = (\sin \lambda_n) / t_n^{k-1}.$$

При $n \rightarrow \infty$ должен существовать предел правой части равенства (20), ибо существует предел левой части — он равен b_{k-1} . Но $(\sin \lambda_n) / t_n^{k-1}$ — вещественное число при любом n ; поэтому и b_{k-1} — вещественное число.

Пусть $\Theta(\zeta) = u(\zeta, \eta) + iv(\zeta, \eta)$, а $\zeta_n = \xi_n + i\eta_n$.

Ясно, что в каждой точке ζ_n имеют место равенства $v(\xi_n, \eta_n) = 0$, $u(\xi_n, \eta_n) - \eta_n = 0$. Таким образом, все точки ζ_n лежат на кривой $v(\xi, \eta) = 0$. В силу (19) эта кривая распадается в достаточно малой окрестности d точки $\zeta = 0$ на k ОППАД, проходящих через точку $\zeta = 0$, причем касательные к этим кривым в точке $\zeta = 0$ делят полный угол вокруг этой точки на $2k$ равных углов. Так как b_{k-1} вещественно и $b_{k-1} \neq 0$, то среди этих кривых имеется одна, которая касается вещественной оси в точке $\zeta = 0$. Обозначим ее через Γ ($\eta = h(\xi)$).

По условию последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится к точке $\zeta = 0$ вдоль вещественной оси. Поэтому почти все точки последовательности $\{\zeta_n\}$ лежат на кривой Γ . Так как в точках ζ_n совпадают бианалитические функции $\text{Im } \zeta$ и $\Theta(\zeta)$, то они, в силу замечания 2, совпадают на всей дуге Γ . Теорема доказана.

Заметим, что на кривой Γ $\eta/\xi \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$, так что $\zeta/\xi \rightarrow 1$. Кроме того из (18) видно, что на Γ

$$\eta = \Theta(\zeta) = \zeta^k (b_{k-1} + b_k \zeta + \dots). \quad (21)$$

Поэтому при $\xi \rightarrow 0$ $\eta/\xi^k \rightarrow b_{k-1}$ ($k \geq 2$). (22)

Так как кривая Γ аналитическая и касается вещественной оси, то она может быть задана в окрестности точки $\zeta = 0$ с помощью ряда вида

$$\eta = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots$$

Из условия (22) ясно, что $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$, $c_k = b_{k-1} \neq 0$, так что уравнение кривой Γ можно представить так:

$$\eta = \xi^k \mu(\xi), \quad \text{где } \mu(0) \neq 0, \quad \mu(\xi) = \sum_{v=k}^{\infty} c_v \xi^{v-k}, \quad k \geq 2. \quad (23)$$

4. Теорема 1 сводит поиск бианалитических функций, имеющих неизолированные a -точки, к поиску аналитических функций $\Theta(z)$, совпадающих с $\operatorname{Im} z$ на каких-либо ОППАД, касающихся вещественной оси в точке $z=0$. Вопрос о существовании такого рода функций $\Theta(z)$ решается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть Γ — произвольная ОППАД, касающаяся вещественной оси плоскости переменного z в точке $z=0$. Тогда существует — и притом единственная — функция $\Theta(z)$, аналитическая в некоторой окрестности δ точки $z=0$ и обладающая тем свойством, что бианалитическая функция $\Theta(z) - \operatorname{Im} z$ обращается в нуль во всех точках дуги Γ , лежащих внутри δ .

Доказательство. Пусть Γ отлична от какого-либо интервала вещественной оси (в противном случае теорема очевидна, $\Theta(z) \equiv 0$).

Вблизи точки $z=0$ возможно кривую Γ задать уравнением вида

$$y = x^k \mu(x) \quad (\alpha < x < \beta), \quad (23')$$

где $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\mu(0) \neq 0$, k — натуральное число, $k \geq 2$, $\mu(z)$ аналитична в некоторой окрестности $d \{ |z| < R \}$ точки $z=0$ и вещественна на вещественной оси. Можно считать, что

$$R < \min \{ |\alpha|, |\beta| \}.$$

Функция

$$z \equiv v(\omega) = \omega + i\omega^k \mu(\omega) \quad (24)$$

аналитична в круге d , причем $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$. Поэтому (см., например, [4]) в плоскости переменного z существует достаточно малый кружок $\delta \{ |z| < \rho \}$, в котором функция $\omega = \lambda(z)$, обратная по отношению к $z = v(\omega)$, определена и однозначна, причем все значения, которые принимает функция $\omega = \lambda(z)$ в круге δ , принадлежат кругу d . Обозначим через L тот кусок кривой Γ , который принадлежит кругу δ .

Рассмотрим функцию

$$\Theta(z) = i[\lambda(z) - z], \quad (25)$$

которая, очевидно, аналитична и однозначна в δ .

Пусть $z \in L$, так что $z = x + ix^k \mu(x)$.

Тогда $\lambda(z) = x$ и $\Theta(z) = x^k \mu(x)$,

то есть $\Theta(z) - \operatorname{Im} z = 0$ на L .

Единственность такой функции $\Theta(z)$ следует, очевидно, из внутренней теоремы единственности для аналитических функций. Теорема 2 доказана. Одновременно с доказательством мы получили алгоритм для построения искомой функции $\Theta(z)$.

Следствие. Какова бы ни была ОППАД Γ , проходящая через точку z_0 , и каким бы ни было комплексное число a , всегда существует такая функция $B(z)$, бианалитическая в некоторой окрестности δ точки z_0 , которая на куске кривой Γ , лежащем в этой окрестности, равна a .

Действительно, пусть касательная к Γ в точке z_0 образует угол α с вещественной осью; пусть $\Psi(\zeta)$ — произвольная функция, аналитическая в окрестности точки $\zeta = 0$. Тогда нетрудно проверить, что требуемыми свойствами обладает функция

$$B(z) = \Psi(\zeta) [\Theta(\zeta) - \operatorname{Im} \zeta] + \alpha, \quad (26)$$

где

$$\zeta = (z - z_0) e^{-i\alpha}.$$

Замечание 3. Если оказывается, что кривая Γ , о которой говорится в теореме 2, принадлежит области аналитичности функции $\Theta(z)$, то функция $\Theta(z) - \operatorname{Im} z$ обращается в нуль во всех точках кривой Γ . Для доказательства достаточно воспользоваться замечанием 2.

5. Пример. Построим аналитическую функцию $\Theta(z)$, которая на куске L параболы $y = x^2$, лежащем внутри достаточно малой окрестности точки $z = 0$, удовлетворяет условию

$$\Theta(z) - \operatorname{Im} z = 0.$$

В данном случае $k=2$, $\mu(z) \equiv 1$.

Строим функцию $z = \omega + i\omega^2$ и ей обратную

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4iz}}{2i}.$$

При этом однозначную ветвь функции $\sqrt{1 + 4iz}$ следует выбрать так, чтобы $\lambda(0) = 0$, то есть, чтобы $\sqrt{1 + 4iz} = 1$ при $z = 0$. По формуле (25)

$$\Theta(z) = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 4iz}) - iz. \quad (27)$$

Функция $\Theta(z)$ имеет одну особую точку (точку ветвления) $z = i/4$, так что парабола $y = x^2$ целиком лежит в области аналитичности функции $\Theta(z)$. Поэтому, в силу замечания 3, равенство $\Theta(z) - \operatorname{Im} z = 0$ имеет место на всей параболе.

Легко и путем непосредственной проверки убедиться, что равенство $\Theta(z) = \operatorname{Im} z$ имеет место на параболе $y = x^2$. Действительно, на этой кривой $z = x + ix^2$ и

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 4i(x + ix^2)}) - i(x + ix^2) = \\ &= \frac{1}{2} [-1 + (1 + 2ix)] - i(x + ix^2) = x^2 = \operatorname{Im} z. \end{aligned}$$

Беря $\Theta(z)$ по формуле (27), при любом выборе функции $\Psi(z)$, регулярной в некотором круге D с центром в точке $z = 0$ мы с помощью формулы $B(z) = \alpha + \Psi(z) [\Theta(z) - \operatorname{Im} z]$ будем получать бивалатическую функцию, для которой точки параболы $y = x^2$, которые лежат в круге D , будут неизолрованными α -точками. При любом выборе вещественной константы α и комплексной константы z_0 функция $\Phi(z) = B[(z - z_0) e^{i\alpha}]$ будет иметь неизолрованными α -точками все точки дуги некоторой параболы, получающейся из параболы $y = x^2$ путем сдвига и поворота.

6. Теорема 2 носит локальный характер. Чтобы можно было воспользоваться замечанием 3, необходимо уже знать функцию $\Theta(z)$. Следующая теорема позволяет сделать аналогичный вывод еще до построения функции $\Theta(z)$.

Теорема 3. Для всякой ОППАД $\Gamma \{z = z(t)\}$ существует функция $B(z)$, которая бианалитична в некоторой области D , содержащей дугу Γ , и которая обращается в нуль во всех точках этой дуги.

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка на дуге Γ , α — угол между вещественной осью и касательной к Γ в этой точке. Перейдем к новому переменному ζ с помощью преобразования

$$z = z_0 + e^{i\alpha}\zeta \quad (\zeta = (z - z_0)e^{-i\alpha}).$$

В координатной плоскости нового переменного ζ кривая Γ имеет уравнение

$$\zeta = \zeta(t) = [z(t) - z_0]e^{-i\alpha},$$

причем она проходит через точку $\zeta = 0$ и в этой точке касается вещественной оси (координатной плоскости переменного ζ).

В силу теоремы 2 существует такая функция $\Theta(\zeta)$, аналитическая в некоторой окрестности δ точки $\zeta = 0$ и удовлетворяющая условию $\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta = 0$ на той части Γ_δ дуги Γ , которая попадает в кружок δ .

Вернемся теперь к переменному z ; получим, что на Γ_δ

$$\Theta[(z - z_0)e^{-i\alpha}] - \frac{1}{2i}[(z - z_0)e^{-i\alpha} - (\bar{z} - \bar{z}_0)e^{i\alpha}] = 0. \quad (28)$$

Коэффициент при $\bar{z}$ — константа $e^{i\alpha}/2i$.

Разделив обе части равенства (28) на этот коэффициент, можем формулу (28) привести к виду

$$\varphi(z) + \bar{z} = 0, \quad (29)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности точки z_0 .

Итак, около каждой точки z_0 дуги Γ возможно описать открытый круг $\delta \equiv \delta(z_0; \Gamma)$ так, чтобы в нем существовала некоторая аналитическая функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условию (29) на той части Γ_δ дуги Γ , которая попадает в δ . Пусть дуга Γ имеет уравнение $z = z(t)$ ($\alpha < t < \beta$).

Выберем числа a и b так, чтобы $\alpha < a < b < \beta$. Тогда кривая $\gamma \{z = z(t), a \leq t \leq b\}$ — замкнутая часть дуги Γ . Пусть точка z_0 пробегает дугу γ . В силу леммы Гейне-Бореля возможно из бесконечного множества открытых кругов $\delta(z_0; \Gamma)$ выбрать конечное число таких кругов $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, которые вместе покрывают всю дугу γ , причем при любом v ($v = 1, 2, \dots, m-1$) кружки δ_v и δ_{v+1} содержат общий кусок $\gamma_{v,v+1}$ дуги γ . Как мы видели выше (см. формулу (29)), при $v = 1, 2, \dots, m$ существует в круге δ_v такая аналитическая функ-

ция $\varphi_\nu(z)$, что на куске γ_ν дуги Γ , лежащем в $\delta_{\nu+1}$, имеет место равенство

$$\varphi_\nu(z) + \bar{z} = 0. \quad (30)$$

Так как на дуге $\gamma_{\nu+1}$ имеют место равенства $\varphi_\nu(z) + \bar{z} = 0$ и $\varphi_{\nu+1}(z) + \bar{z} = 0$, то $\varphi_\nu(z) = \varphi_{\nu+1}(z)$ на $\gamma_{\nu+1}$, и в силу теоремы единственности для аналитических функций, функция $\varphi_{\nu+1}(z)$ служит аналитическим продолжением функции $\varphi_\nu(z)$ на круг $\delta_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1$).

Но тем самым установлено существование некоторой функции $\varphi(z)$, которая аналитична в некоторой области D , содержащей дугу γ , и удовлетворяет на γ условию

$$\varphi(z) + \bar{z} = 0. \quad (31)$$

Беря числа a и b достаточно близкими к α и β и пользуясь теоремой единственности для аналитических функций, нетрудно убедиться, что область D аналитичности функции $\varphi(z)$ должна содержать все точки дуги Γ , причем в каждой из этих точек имеет место (31). Функция $\varphi(z) + \bar{z}$ и будет искомой бианалитической функцией.

Умножая ее на произвольную функцию $A(z)$, аналитическую в D , мы опять получим функцию, удовлетворяющую условию теоремы.

7. Бианалитическую функцию $B(z)$ назовем *мероморфной*, если она представима в виде

$$B(z) = \varphi(z) + \bar{z} \cdot \psi(z), \quad (32)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — мероморфные функции. Аналогично определяется *целая* бианалитическая функция.

Выясним теперь, каковы те целые и мероморфные бианалитические функции, которые имеют неизолированные нули. Ниже запись вида „ $A(z) \sim B(z)$ при больших z “ будет означать, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [A(z)/B(z)] = \text{const} \neq 0.$$

Если функция $R(z)$ представима в виде

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n / \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

то под $\bar{R}(z)$ будем понимать функцию

$$\bar{R}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n / \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n z^n.$$

Теорема 4. *Всякая мероморфная бианалитическая функция (1), имеющая неизолированный нуль, совпадает — с точностью до мероморфного аналитического сомножителя — с некоторой вырожденной бианалитической функцией. Иными словами, функция $B(z)$ может быть в данном случае представлена в виде*

$$B(z) = M(z) V(z), \quad (33)$$

где $V(z)$ — бианалитическая функция, которая осуществляет вырожденное отображение, а $M(z)$ — мероморфная аналитическая функция.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $B(z) \neq 0$ и что неизолированным нулем функции $B(z)$ является точка $z=0$. Поэтому должна существовать такая последовательность $\{z_n\}$, что $B(z_n)=0$ и $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(34)

Обратимся к представлению (32) функции $B(z)$. Ясно, что $\psi(z) \neq 0$ (в противном случае точка $z=0$ наверняка не могла бы быть предельной для множества нулей функции $B(z)$). Отсюда следует, что среди точек z_n имеется не более, чем конечное число нулей функции $\psi(z)$. Поэтому можно считать, что $\psi(z_n) \neq 0$ (нули функции $\psi(z)$ удалим из последовательности $\{z_n\}$). Положим

$$R(z) = -\varphi(z)/\psi(z). \quad (35)$$

$$\Phi(z) = R(z) - \bar{z}. \quad (36)$$

Тогда

$$B(z) = -\psi(z)\Phi(z). \quad (37)$$

Понятно, что $R(z)$ — мероморфная функция.

Во всех точках z_n $\Phi(z) = 0$, то есть

$$R(z) = \bar{z}, \quad (38)$$

$$\bar{R}(\bar{z}) = z, \quad (39)$$

откуда

$$\bar{R}[R(z)] = z. \quad (40)$$

Функция $R(z)$ регулярна в точке $z=0$. В той же точке, как легко понять, регулярны также функции $\bar{R}(z)$ и $\bar{R}[R(z)]$.

Нетрудно убедиться, что функция $\bar{R}[R(z)]$ может быть аналитически продолжена из окрестности точки $z=0$ в любую регулярную точку этой функции. Отсюда и из теоремы единственности следует, что равенство (40) справедливо на всей плоскости.

Выясним, какой вид может иметь мероморфная (в конечной плоскости) функция $R(z)$, удовлетворяющая условию (40).

Сначала покажем, что $R(z)$ не может быть трансцендентной функцией. Действительно, если $R(z)$ была бы трансцендентна, то она в силу теоремы Пикара принимала бы бесконечное число раз любое конечное значение, кроме, возможно, двух. Поэтому мы могли бы выбрать такую точку γ , которая не была бы полюсом для $\bar{R}(z)$, и такую последовательность $\{\zeta_n\}$, что 1) $\zeta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и 2) $R(\zeta_n) = \gamma$. Тогда при любом n , согласно равенству (40), имело бы место равенство $\bar{R}(\gamma) = \zeta_n$, что, очевидно, невозможно.

Итак, $R(z)$ — рациональная функция. Тогда $R(z)$ имеет вид

$$R(z) = A + \sum_{k=1}^n P_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) + P(z), \quad (41)$$

где $P_k(u)$ и $P(z)$ — какие-то полиномы, причем $P_k(0) = 0$, $P(0) = 0$, $A = \text{const}$. Покажем теперь, что $R(z)$ имеет лишь один полюс — конечный или бесконечный — и притом обязательно простой.

Рассмотрим сначала полином $P(z)$ и выясним, какой может быть его точная степень m . Допустим, что $m > 1$. Тогда при больших z $R(z) \sim z^m$ и $\bar{R}[R(z)] \sim z^{m^2}$, так что при больших z равенство (40) невозможно. Итак, $P(z)$ — полином степени не выше первой.

Если $P(z)$ имеет простой полюс в бесконечности ($m = 1$), то других полюсов функция $R(z)$ иметь не может.

Действительно, если $P_1(z) \neq 0$ (то есть $R(z)$ имеет еще полюс $z = a_1$), то при $z \rightarrow a_1$ $P_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) \rightarrow \infty$, так что $\zeta \equiv R(z) \rightarrow \infty$. Но тогда (при $m = 1$) $\bar{R}(\zeta) \rightarrow \infty$, так что равенство (40) невозможно. Итак, в данном случае $R(z)$ имеет вид $R(z) = A + Bz$ (A и B константы).

Так как $R(0) = 0$ (см. (38)), то $A = 0$. Из (40) следует, что $\bar{B}Bz = z$, так что $|B| = 1$, $B = e^{i\alpha}$, где $\alpha = \text{const}$, $\text{Im } \alpha = 0$. Итак, в данном случае $R(z) = e^{i\alpha}z$,

$$\Phi(z) = e^{i\alpha}z - \bar{z}, \quad (42)$$

$$B(z) = -\psi(z)[e^{i\alpha}z - \bar{z}]. \quad (42')$$

Здесь $\psi(z)$ — мероморфная аналитическая функция, а $\Phi(z)$ действительно осуществляет вырожденное отображение (сравните с формулой (17) в [2]).

Пусть теперь $R(z)$ не имеет полюса в бесконечности (то есть $P(z) \equiv 0$). Покажем, что тогда $R(z)$ может иметь лишь один конечный полюс, и притом простой. Действительно, пусть a_1 — какой-либо полюс функции $R(z)$. Тогда $\zeta \equiv R(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow a_1$, и поэтому (см. формулу (41)) $\bar{R}(\zeta) \rightarrow A$. Из формулы (40) мы получим, что это возможно лишь в том случае, когда $a_1 = \bar{A}$. Таким образом, в рассматриваемом случае только точка $\bar{A}$ может быть полюсом функции $R(z)$. Поэтому в данном случае $R(z)$ имеет вид

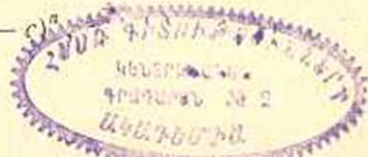
$$R(z) = \bar{c} + \frac{b_k}{(z-c)^k} + \frac{b_{k+1}}{(z-c)^{k+1}} + \dots + \frac{b_n}{(z-c)^n} = \bar{c} + \frac{P_{n-1}(z-c)}{(z-c)^n}, \quad (43)$$

где $\bar{c} = A$, $1 \leq k \leq n$, $b_k \neq 0$, $b_n \neq 0$, $P_{n-1}(z-c)$ — полином степени $n-k$ от $z-c$. Ясно, что при $z \rightarrow \infty$

$$P_{n-1}(z-c)/(z-c)^n \sim \frac{1}{(z-c)^k}.$$

Обозначим, как и раньше, $R(z)$ через ζ . Тогда

$$\zeta - \bar{c} = P_{n-1}(z-c)/(z-c)^n$$



$$\begin{aligned}\bar{R}(\zeta) &= c + \frac{\bar{b}_k}{(\zeta - \bar{c})^k} + \dots + \frac{\bar{b}_n}{(\zeta - \bar{c})^n} = \\ &= c + \bar{b}_k \left[\frac{(z - c)^n}{P_{n-1}(z - c)} \right]^k + \dots + \bar{b}_n \left[\frac{(z - c)^n}{P_{n-1}(z - c)} \right]^n.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $z \rightarrow \infty$ $\bar{R}(\zeta) \sim (z - c)^{nk}$. Поэтому равенство (40), то есть равенство $\bar{R}(\zeta) = z$, заведомо невозможно при больших z , если $n > 1$.

Итак, $n = 1$ и $R(z)$ имеет вид

$$\zeta = R(z) = \bar{c} + \frac{B}{z - c}.$$

Но в окрестности точки $z = 0$ $R(z) = \bar{z}$. Отсюда следует, что $B = |c|^2$. Таким образом,

$$R(z) = \bar{c} + |c|^2/(z - c), \quad (44)$$

$$B(z) = \frac{\psi(z)}{z - c} (|z - c|^2 - |c|^2). \quad (45)$$

Из формул (42') и (45) следует справедливость теоремы.

Следствие 1. Если мероморфная бианалитическая функция $B(z)$ имеет неизолитрованную a -точку в точке z_0 , то она представима в одном из следующих видов:

- I. $B(z) = \psi(z) [e^{i\alpha} (z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)] + a,$
- II. $B(z) = \psi(z) [|z - z_0 - c|^2 - |c|^2] + a,$

где $\psi(z)$ — мероморфная аналитическая функция, $\alpha = \text{const}$, $\text{Im } \alpha = 0$, $c = \text{const}$.

Следствие 2. Если мероморфная бианалитическая функция имеет хотя бы одну неизолитрованную a -точку, то геометрическим местом a -точек этой функции служит прямая или окружность, если отвлечься от множества точек, которое либо является конечным, либо имеет единственной предельной точкой бесконечность.

Теорема 4 позволяет сделать некоторые выводы о целых (или мероморфных) бианалитических функциях, принимающих неизолитрованно два (соответственно — три) значения.

Приведем здесь без доказательства один такой результат.

Теорема 5. Целая бианалитическая функция, принимающая неизолитрованно два каких-либо значения, осуществляет вырожденное отображение (*и, следовательно, принимает неизолитрованно континуум значений*).

8. Поиск неизолитрованных a -точек бианалитической функции возможно несколько упростить, если учесть следующие соображения. Пусть функция $w = B(z) = \varphi(z) + \bar{z} \cdot \psi(z)$ бианалитична в некоторой области D .

Если якобиан $J_{w/z}$ отображения $w = B(z)$ в какой-то точке z_0 из области D отличен от нуля, то в достаточно малой окрестности этой точки, как известно, отображение будет взаимно-однозначным.

Если же z_0 — предельная точка для α -точек функции $B(z)$, то отображение $w = B(z)$ заведомо не будет взаимно-однозначным в этой окрестности.

Следовательно, все неизолрованные α -точки функции $B(z)$ принадлежат „кривой“ $J_{w/z} = 0$, то есть, „кривой“

$$|\varphi'(z) + \bar{z}\psi'(z)| = |\psi(z)|.$$

Допустим, что эта „кривая“ представлена в виде суммы нескольких (быть может, частично перекрывающихся) ОППАД

$$\Gamma_\nu \{z = z_\nu(t), \alpha_\nu < t < \beta_\nu\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Из замечания 2 следует, что если на какой-то из этих дуг Γ_ν найдутся две точки z'_ν и z''_ν такие, что $B(z'_\nu) \neq B(z''_\nu)$, то дуга Γ_ν вовсе свободна от неизолрованных α -точек.

Смоленский педагогический институт
им. К. Маркса

Поступила 19 VI 1963

Մ. Բ. Բաղի

ԶՄԵԿՈՒՍԱՅՎԱԾ α ԿԵՏԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հայտնաժամ ապացուցվում է

$$B(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z)$$

անփոփոխականության ֆունկցիայի գոյությունը և տրվում է նրա կառուցման եղանակը, որտեղ $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են ինչ որ տիրույթում, և $B(z)$ -ը ոչ առանձնացված կերպով — տվյալ անալիտիկ ազնիվ բաղադրանքներ կառուցվում, ընդունում է նախորդ տված α արժեքը:

Հաստատվում է, որ մերոմորֆ $\varphi(z)$ -ի և $\psi(z)$ -ի դեպքում, չմեկուսացված ձևով զերո արժեք ընդունող $B(z)$ բիանալիտիկ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել որպես մի մերոմորֆ անալիտիկ ֆունկցիայի և վերահսկված արտադրանքների իրականացնող բիանալիտիկ ֆունկցիայի արտադրյալ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Բալկ Մ. Բ. К теории полианалитических функций. Сб. „V Всесоюзная конференция по теории функций“, Ереван, 1960.
2. Բալկ Մ. Բ. Вырожденные бианалитические отображения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964.
3. Բալկ Մ. Բ. Теоремы единственности для полианалитических функций. Сб. „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, под ред. А. И. Маркушевича“ (готовится к печати).
4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, гл. VIII, § 1, п. 1. Гостехиздат, М., 1954.