

А. Е. Бадалян

Об одной вариационной задаче

С ускорительной техникой, а также с некоторыми математическими вопросами связана следующая вариационная задача: дана квадратная матрица порядка n

$$A = [a_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть Φ является множеством всевозможных взаимно-однозначных отображений множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Требуется найти

$$\min_{\varphi \in \Phi} \max_i |a_{i\varphi(i)}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и отображение φ , для которого достигается указанный минимум*.

Решение.

Набор элементов $a_{i\varphi(i)} < a_{1\varphi(1)}, \dots, a_{i\varphi(i)}, \dots, a_{n\varphi(n)} >$ назовем набором матрицы A . Очевидно, этот набор содержит из каждой строки и из каждого столбца матрицы A один и только один элемент. Между множествами

$$R = \{ < a_{1\varphi(1)}, \dots, a_{i\varphi(i)}, \dots, a_{n\varphi(n)} > \} \text{ и } \Phi$$

имеет место взаимно однозначное соответствие. Количество элементов этих множеств равно $n!$

Обозначим через m_1 максимальный элемент матрицы A , а множество наборов матрицы, содержащих элемент m_1 — через R_1 .

Обозначим через m_2 максимум среди элементов матрицы A , за исключением элементов, равных m_1 , а множество наборов, содержащих m_2 и не содержащих m_1 , — через R_{02} .

Обозначим через m_3 максимум среди элементов матрицы A , за исключением элементов, равных m_1 и m_2 , а множество наборов, содержащих m_3 и не содержащих m_1 и m_2 , — через R_{003} и, вообще, обозначим через m_k максимум среди элементов матрицы A , за исключением элементов, равных $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$, а множество наборов, содержащих m_k и не содержащих $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$, — через $R_{0 \dots 0k}^{k-1}$. Яс-

но, что множества $R_1, R_{02}, \dots, R_{0 \dots 0k}^{k-1}$ попарно не пересекаются.

* На эту задачу обратил мое внимание Р. Оганян.

Теорема. Для того, чтобы $m_k = \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\bigcup_{i=1}^k R_{0 \dots 0 i}^{i-1} = R. \quad (1)$$

Действительно, если $m_k = \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}$, то в R не существует набор, максимальный элемент которого меньше m_k . Значит, для всех наборов из R максимальный элемент $\geq m_k$, то есть каждый набор из R находится среди слагаемых левой части равенства (1). Обратно, если в R существует набор, который не содержится в левой части равенства (1), то максимальный элемент этого набора $< m_k$, то есть

$$m_k \neq \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}.$$

Количество наборов в множестве $R_{0 \dots 0 i}^{i-1}$ обозначим через $S_{0 \dots 0 i}^{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Тогда имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^k S_{0 \dots 0 i}^{i-1} = n!, \quad (1')$$

если $m_k = \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}$.

Введем следующее обозначение: пусть $R_{i_1 \dots i_l \dots i_k}$ означает множество наборов, содержащих

$$P(i_1 \neq 0) \cdot m_1 \& P(i_2 \neq 0) \cdot m_2 \& \dots \& P(i_l \neq 0) \cdot m_l \& \dots \& P(i_k \neq 0) \cdot m_k,$$

где считается

$$P(i_l \neq 0) \cdot m_l = \begin{cases} m_l & \text{при } P(i_l \neq 0) = 1 \\ \wedge & \text{при } P(i_l \neq 0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$R_1 = R_{11},$$

$$R_{02} = R_2 - R_{12},$$

$$R_{003} = R_3 - R_{013} - R_{103} - R_{123},$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned} R_{0 \dots 0 k}^{k-1} &= R_k - R_{02 \dots k-1k} - \dots - R_{12 \dots k-20k} - R_{003 \dots k-1k} - \\ &- \dots - R_{133 \dots k-300k} - \dots - R_{0 \dots 0 i+1 \dots k}^{i-1} - \dots - R_{12 \dots k-i-1 0 \dots 0 k}^{i-1} - \\ &- \dots - R_{0 \dots 0 k-1k} - \dots - R_{10 \dots 0k} - R_{123 \dots k-1k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Соответственно имеем:

$$S_{0 \dots 0 k}^{k-1} = S_k - S_{02 \dots k-1k} - \dots - S_{12 \dots k-20k} - S_{003 \dots k-1k} - \dots$$

* Здесь & означает конъюнкцию.

$$\begin{aligned}
 & -S_{123\dots k-300k} - \dots - S_{0\dots 0 \overbrace{i+1\dots k}^i} - \dots - S_{12\dots k-i-10\dots 0k} - \\
 & - \dots - S_{0\dots 0k-1k} - \dots - S_{10\dots 0k} - S_{123\dots k-1k}. \quad (2')
 \end{aligned}$$

Формула (2') является основной формулой и с равенством (1') дает возможность находить m_k . В частном случае, если m_i ($i=1, 2, \dots, k$) встречаются в матрице однократно и если они попарно находятся в разных строках и в разных столбцах, члены правой части формулы (2') принимают следующие значения:

$$S_k = (n-1)!,$$

$$S_{02\dots k} = S_{103\dots k} = \dots = S_{12\dots k-20k} = (n-k+1)! - (n-k)!,$$

$$\begin{aligned}
 S_{003\dots k} = S_{00204\dots k} = \dots = S_{12\dots k-300k} = (n-k+2)! - \\
 - [C_2^{(1)}(n-k+1)! + C_2^2(n-k)!],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{0004\dots k} = S_{00305\dots k} = \dots = S_{123\dots k-4000k} = (n-k+3)! - \\
 - [C_3^{(1)}(n-k+2)! + C_3^2(n-k+1)! + C_3^3(n-k)!],
 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 S_{0\dots 0 \overbrace{i+1\dots k}^i} = \dots = S_{12\dots k-i-10\dots 0k} = (n-k+i)! - [C_i^{(1)}(n-k+i-1)! + \\
 + C_i^2(n-k+i-2)! + \dots + C_i^{i-1}(n-k+1)! + C_i^i(n-k)!].
 \end{aligned}$$

Подставляя последнее значение в (2'), получим:

$$\begin{aligned}
 S_{0\dots 0k} = (n-1)! - C_{k-1}^1 \{ (n-k+1)! - (n-k)! \} - \\
 - C_{k-1}^2 \{ (n-k+2)! - [C_2^{(1)}(n-k+1)! + C_2^2(n-k)!] \} - \\
 - C_{k-1}^3 \{ (n-k+3)! - [C_3^{(1)}(n-k+2)! + C_3^2(n-k+1)! + \\
 + C_3^3(n-k)!] \} - \dots - C_{k-i}^i \{ (n-k+i)! - [C_i^{(1)}(n-k+i-1)! + \\
 + C_i^2(n-k+i-2)! + \dots + C_i^{i-1}(n-k+1)! + \\
 + C_i^i(n-k)!] \} - \dots - C_{k-1}^{k-1}(n-k)!
 \end{aligned}$$

Если же все m_i ($i=1, 2, \dots, k$) встречаются в матрице однократно, но они расположены так, что первая строка содержит μ_{1k} элементов из $m_1, m_2, \dots, m_k$, вторая строка содержит μ_{2k} элементов из $m_1, m_2, \dots, m_k$ и т. д., n -ая строка содержит μ_{nk} элементов из $m_1, m_2, \dots, m_k$; $\mu_{1k} + \dots + \mu_{nk} = k$, а столбцы матрицы содержат соответственно $\nu_{1k}, \nu_{2k}, \dots, \nu_{nk}$ элементов из $m_1, m_2, \dots, m_k$; $\nu_{1k} + \nu_{2k} + \dots + \nu_{nk} = k$, то

$$\begin{aligned}
 S_{0\dots 0k} = (n-1)! - A_1 \{ (n-k+1)! - (n-k)! \} - A_2 \{ (n-k+2)! - \\
 - [C_2^{(1)}(n-k+1)! + C_2^2(n-k)!] \} - \dots - A_i \{ (n-k+i-1)! - \\
 - [C_{i-1}^{(1)}(n-k+i-2)! + C_{i-1}^2(n-k+i-3)! + \dots + C_{i-1}^{i-2}(n-k+1)! + \\
 + C_{i-1}^{i-1}(n-k)!] \} - \dots - A_{k-2} \{ (n-3)! - [C_{k-3}^{(1)}(n-4)! + C_{k-3}^2(n-5)! +
 \end{aligned}$$

$$+ \dots + C_{k-3}^{k-4} (n-k+1)! + C_{k-3}^{k-3} (n-k)!].$$

Здесь

$$A_l = \tilde{C}_{k-1}^l - \tilde{C}_{k-\mu_{1k}-1}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\mu_{sk}}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\mu_{nk}-1}^l - \tilde{C}_{k-\nu_{1k}-1}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\nu_{lk}}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\nu_{nk}-1}^l,$$

где

$$\tilde{C}_{k-\alpha-1}^l = \begin{cases} C_{k-\alpha-1}^l, & \text{если } \alpha \neq 0 \\ 0, & \text{если } \alpha = 0; \end{cases}$$

предполагается также, что m_k находится в s -той строке и в l -том столбце.

В общем случае формула не приводится из-за громоздкости.

Замечания:

1. Число тех φ , при которых $\min_{\varphi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} = m_k$, равно $S_{0 \dots 0k}$, а каждый из φ соответствует некоторому набору из множества $R_{0 \dots 0k}$, поэтому φ можно найти.

2. Фактически имеется и решение следующей задачи. Найти класс Φ' тех φ , при которых $\min_{\varphi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} = a_{l_0 j_0}$, где $a_{l_0 j_0}$ — произвольный фиксированный элемент исходной матрицы A . Очевидно, если $a_{l_0 j_0} < m_k$, то не существует φ , для которого

$$\min_{\varphi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} = a_{l_0 j_0}.$$

А если $a_{l_0 j_0} \geq m_k$, то есть $a_{l_0 j_0} = m_i (i \leq k)$, то класс Φ' есть множество тех φ , которые соответствуют наборам из $R_{0 \dots 0i}$. Число таких φ будет $S_{0 \dots 0i}$.

3. Описанным методом можно найти также $\max_{\varphi} \min_l \{a_{l\varphi(l)}\}$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \varphi \in \Phi).$$

Ереванский государственный университет

Поступила 19 X 1963

2. Ե. Բադալյան

ՄԻ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատություն մեջ լուծված է հետևյալ վարիացիոն խնդիրը՝ տված է n կարգի քառակուսային մատրիցա $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) և $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմություն բոլոր փոխմիարժեք արտապատկերումների բազմությունը իր վրա:

Պահանջվում է գտնել՝

$$\min_{\varphi \in \Phi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

և այն φ -ն, որը տալիս է նշված մինիմումը:

Ընդ որում որոշված է նաև պահանջվող φ -երի թիվը: