ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 2, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Э. М. Лазиев

Распространение электромагнитных волн в среде с периодически изменяющимися ε и μ

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в среде, диэлектрическая и магнитная проницаемости которой изменяются в направлении оси z, оставаясь неизменными в плоскости xy.

Уравнения Максвелла в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{H}=-\frac{i\omega}{c}\vec{D}, \qquad \vec{D}=\varepsilon(z)\vec{E},\\ \operatorname{rot}\vec{E}=\frac{i\omega}{c}\vec{B}, \qquad \vec{B}=\mu(z)\vec{H},\\ \operatorname{div}\vec{D}=0,\\ \operatorname{div}\vec{B}=0.\end{gathered} \tag{1}$$

В системе (1) принято, что зависимость $\vec{E}$ и $\vec{H}$ от времени имеет вид $\exp(-i\omega t)$.

Решая систему уравнений Максвелла, приходим к следующим выражениям для $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\Delta\vec{H}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\vec{H}=-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu}\vec{H}\operatorname{grad}\mu\right)-\frac{1}{\varepsilon}[\operatorname{grad}\varepsilon\times\operatorname{rot}\vec{H}],$$

$$\Delta\vec{E}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\vec{E}=-\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\varepsilon}\vec{E}\operatorname{grad}\varepsilon\right)-\frac{1}{\mu}[\operatorname{grad}\mu\times\operatorname{rot}\vec{E}]. \tag{2}$$

Примем плоскость xz за плоскость падения волны. В этом случае все компоненты полей не будут зависеть от координаты y [1]. Тогда уравнения (2) будут иметь вид:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu H_x=\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{\partial H_x}{\partial z}-\left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\right)\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{3а}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu H_y=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \tag{3б}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu H_z=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}H_z\right). \tag{3в}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu E_x=\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial E_x}{\partial z}-\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}+\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}\right)\frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{3г}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu E_y=-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial E_y}{\partial z}, \tag{3д}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu E_z=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}E_z\right). \tag{3е}$$

При сделанных предположениях имеют место два независимых случая поляризации E_x, E_z, H_y и H_x, H_z, E_y [1].

Рассмотрим систему уравнений (3б), (3г), (3е), что соответствует первому случаю поляризации, когда вектор $\vec{E}$ лежит в плоскости распространения волны. Все результаты будут справедливы и для второго случая. Для изучения дисперсионных свойств среды достаточно рассмотреть условия распространения для одной из компонент. Рассмотрим, например, уравнение (3б), где разделим переменные, введя обозначение

$$H_y=\varphi_1(x)\,\varphi_2(z). \tag{4}$$

После разделения переменных получаем

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{c^2}k^2\varphi_1=0, \tag{5а}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon\mu-k^2)\varphi_2=0,\quad k^2=\text{const}. \tag{5б}$$

Уравнение (5а) имеет решение

$$\varphi_1=\exp\left(\pm i\frac{\omega}{c}kx\right). \tag{6}$$

Дисперсионные свойства среды определим из решения уравнения (5б). Произведем замену

$$\varphi_2=\psi\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\varepsilon\right). \tag{7}$$

Тогда уравнение (5б) принимает вид

$$\psi''+\left[\frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon\mu-k^2)-\left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right)'\right]\psi=0. \tag{8}$$

Рассмотрим конкретный случай $\varepsilon(z)$ и $\mu(z)$

$$\varepsilon(z)=\varepsilon_0\left(1+\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\cos 2\pi\frac{z}{l}\right),\qquad \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\ll 1,$$

$$\mu(z)=\mu_0\left(1+\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\cos 2\pi\frac{z}{l}\right),\qquad \frac{\Delta\mu}{\mu_0}\ll 1, \tag{9}$$

где l — период среды.

Раскладывая коэффициент при ψ в уравнении (8) в ряд по малому параметру $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$ и ограничиваясь членами ряда первого порядка, уравнение (8) можно записать в следующем виде:

$$\psi'' + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\mu_0\left[\left(1-\frac{k^2}{\varepsilon_0\mu_0}\right)+\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}+\frac{\Delta\mu}{\mu_0}+\frac{1}{2}\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{\lambda_0^2}{l^2}\right)\cos 2\pi\frac{z}{l}\right]\psi=0, \quad (10)$$

где

$$\lambda_0^2=4\pi^2/\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0\mu_0.$$

Уравнение (10) можно привести к уравнению Матье. Произведем замену $\pi z/l=\xi$, $\psi(z)=u(\xi)$, после чего (10) примет вид

$$u''+(\eta+2\gamma\cos 2\xi)\,u=0, \quad (11)$$

где приняты обозначения

$$\eta=\left(\frac{l}{\lambda_0/2}\right)^2(1-\varkappa^2), \qquad \varkappa^2=k^2/\varepsilon_0\mu_0,$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}+\frac{\Delta\mu}{\mu_0}\right)\left(\frac{l}{\lambda_0/2}\right)^2+\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

Решение уравнения (11) имеет вид [2]

$$u(\xi)=Au_1(\xi)+Bu_2(\xi), \quad (12)$$

где A и B — постоянные,

$$u_{1,2}=\exp(\pm q\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{2n}\exp(\pm i2n\xi). \quad (13)$$

Коэффициенты c_{2n} определяются из однородной системы уравнений

$$c_{2n}+p_{2n}(c_{2n+2}+c_{2n-2})=0;\quad n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,$$

$$p_{2n}=\frac{\gamma}{(2n-iq)-\eta},$$

величина q определяется из уравнения

$$\mathrm{ch}(q\pi)=1-2\Delta_1(0)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\eta}\right), \quad (14)$$

где $\Delta_1(0)$ — детерминант Хилла [3].

Если удовлетворяется условие $\gamma\ll\eta$, то детерминант $\Delta_1(0)$ можно записать в виде [2]

$$\Delta_1(0)=1+\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\eta}\right)}{4\eta}\left|\frac{\gamma^2}{1-\eta}\right|. \quad (15)$$

Выражение (14) определяет дисперсионные свойства среды. Рассматривая (14), можно сделать следующие общие заключения:

а. $\mathrm{ch}(q\pi) > 1$; $q = q_0$, где q_0 — действительно.

б. $-1 \leqslant \mathrm{ch}(q\pi) \leqslant 1$; $q = iq'$, где q' — действительно.

в. $-1 > \mathrm{ch}(q\pi)$; $q = q_0 + i\pi$, где q_0 — действительно.

В случае (а) или (в) в силу фактора $e^{\mp q_0 x}$ имеем экспоненциально затухающие волны (среда обладает полосами непропускания). В случае (б) волны распространяются без затухания.

Для каждой конкретной пары значений η и γ, являющихся функциями $2l/\lambda_0$ необходимо исследовать (14) и (15) с целью определения полос „пропускания“ или „непропускания“.

Физический институт
ГКАЭ

Поступила 2 X 1963

Է. Մ. Լազիև

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՊԱՐԲԵՐԱԲԱՐ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ε ԵՎ μ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է այնպիսի միջավայր, որի դիէլեկտրիկ և մագնիսական թափանցելիությունները միայն z կոորդինատից կախված պարբերական ֆունկցիաներ են։ $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \ll 1$ և $\frac{\Delta\mu}{\mu_0} \ll 1$ պայմանների առկայության դեպքում ստացված է դիսպերսիոն հավասարում «թողարկման և ոչ թողարկման» շերտերի որոշման համար կախված $\frac{\lambda_0}{l}$ հարաբերությունից, որտեղ λ_0-ն ε_0 և μ_0 ունեցող միջավայրում ալիքի երկարությունն է, իսկ l-ը՝ տարածական պարբերությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
2. *Бриллюэн Л., Пароди М.* Распространение волн в периодических структурах. ИЛ., М., 1959.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.