ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 2, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. Варданян

К теории гравитационной устойчивости неоднородной цилиндрической конфигурации

В рамках линейного приближения рассмотрен вопрос влияния неоднородного распределения плотности равновесного состояния на устойчивость жидкого гравитирующего цилиндра по отношению к несимметричным поверхностным возмущениям. Установлено, что экспоненциальное распределение плотности уменьшает частоту колебаний при устойчивости и скорость нарастания амплитуды деформации при неустойчивости, не изменяя заметным образом область неустойчивых гармоник.

Вопросы устойчивости цилиндрических конфигураций имеют важное значение в связи с приложениями в области астрофизики, физики плазмы и гидродинамики. Вопросам устойчивости гравитирующих цилиндров посвящены хорошо известные работы Чандрасекара и Ферми [1], а также других авторов ([2] и др.). В этих исследованиях распределение плотности в состоянии равновесия, как правило, принимается однородным. Однако, большинству реально существующих в природе конфигураций свойственно неоднородное распределение плотности. В последнее время появились некоторые работы, в которых учитывается неоднородность в распределении невозмущенной плотности [3, 4, 5].

В настоящей работе рассматривается вопрос устойчивости цилиндрической конфигурации бесконечной длины, состоящей из несжимаемой жидкой гравитирующей массы, с плотностью, экспоненциально зависящей от радиуса

$$\rho = \rho_0 \exp\left\{-n\frac{r}{R}\right\} \quad (n > 0), \tag{1}$$

по отношению к поверхностным возмущениям типа

$$r = R + \varepsilon \cos m\theta \cos kz \quad (\varepsilon \ll R), \tag{2}$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, изменяющееся в пределах $(0, \infty)$, а m — принимает целые положительные значения.

Предполагается также, что температура не зависит от времени и от координат.

Ввиду того, что наряду с вопросами устойчивости важное значение имеет установление скорости нарастания и времени релаксации неустойчивости, исследование ведется по дисперсионному уравнению [6]

$$\omega^2 = \frac{\delta W}{1/2\int \rho\xi^2 dv}, \tag{3}$$

которое в предположении несжимаемости $((\nabla \vec{v}) = (\nabla \vec{\xi}) = 0)$ может быть получено из уравнения движения Лагранжа, написанного для обобщенной координаты ε. Причем зависимость амплитуды возмущения ε от времени считается экспоненциальной, т. е.

$$\varepsilon = \text{const}\exp\{\pm i\omega t\}. \tag{4}$$

Изменение гравитационной энергии δW находим по формуле [5, 7]

$$\delta W = \frac{1}{2\lambda}\left\{\int_0^{\lambda}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}(\rho\delta V + V_0\delta\rho)\,d\omega + \int_0^{\lambda}\int_0^{2\pi} V_s\rho_s d\sigma,\right. \tag{5}$$

$$(V_s = [V_0 + \delta V]_s,\ \ \rho_s = \rho_0 e^{-n}\varepsilon\cos m\theta\cos kz),$$

исходя из следующей системы уравнений

$$\nabla^2 V = 4\pi G\rho \quad (r \leqslant R), \quad \nabla^2 U = 0 \quad (r > R), \tag{6}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla\rho) = 0, \quad \nabla\vec{v} = 0 \tag{7}$$

и соответствующих им граничных условий

$$V = U, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad v_r = \frac{\partial r}{\partial t} \quad (r = R + \varepsilon\cos m\theta\cos kz). \tag{8}$$

В равновесном состоянии $(\vec{v} = 0)$ уравнения (6) имеют следующие решения:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= 4\pi G\rho_0\int_0^r\frac{dr}{r}\int_0^r e^{-n\frac{r}{R}}\,r\,dr, \\ U_0 &= 4\pi G\rho_0 R^2\left(\frac{e^n - n - 1}{n^2 e^n}\right)\ln r + C_0. \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Решения уравнений (6) и (7) в возмущенном состоянии могут быть представлены в виде

$$\rho' = \rho + \delta\rho, \quad \vec{v} = 0 + \delta\vec{v}, \quad V = V_0 + \delta V, \quad U = U_0 + \delta U. \tag{10}$$

Второе из уравнений (7) $(\nabla\vec{v} = \nabla^2\psi = 0)$ дает поле распределения скоростей $(\vec{v} = \nabla\psi)$

$$\vec{v} = \frac{\dot{\varepsilon}}{I_m(kR)}\left\{I'_m(kr)\cos m\theta\cos kz; \quad -\frac{m}{kr}I_m(kr)\sin m\theta\cos kz;\right.$$

$$\left. - I_m(kr)\cos m\theta\sin kz\right\}. \tag{11}$$

из которого простым интегрированием по времени (так как $d\vec{\xi} = \vec{v}dt$) получаем вектор смещения

$$\vec{\xi}(r, \theta, z) = \frac{\varepsilon}{I'_m(kR)} \Big\{ I'_m(kr) \cos m\theta \cos kz;$$

$$-\frac{m}{kr} I_m(kr) \sin m\theta \cos kz; \quad -I_m(kr) \cos m\theta \cos kz \Big\}. \tag{12}$$

Первое же из уравнений (7) в линейном приближении с помощью (11) дает перераспределение плотности $\delta\rho$ [4, 5]:

$$\delta\rho = \frac{n}{R} \rho \xi_r = \frac{n}{R} \rho_0 e^{-n\frac{r}{R}} \frac{I'_m(kr)}{I'_m(kR)} \varepsilon \cos m\theta \cos kz. \tag{13}$$

Подставляя (10) и (13) в уравнение (6), приведем его к виду

$$\nabla^2 \delta V = 4\pi G \frac{n}{R} \rho \xi_r; \qquad \nabla^2 \delta U = 0. \tag{14}$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие требованиям конечности при $r = 0$ и $r = \infty$, имеют вид

$$\begin{aligned} \delta V &= \varepsilon \left[A I_m(kr) + f(r) \right] \cos m\theta \cos kz, \\ \delta U &= \varepsilon B K_m(kr) \cos m\theta \cos kz. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — бесселевы функции чисто мнимого аргумента, а $f(r)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial t} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) f = \frac{4\pi G n \rho_0}{I'_m(kR)} e^{-\frac{n}{R} r} I'_m(kr). \tag{16}$$

Представляя функции $f(r)$ и $F(r) = e^{-\frac{n}{R} r} I'_m(kr)$ в виде интеграла Фурье-Бесселя

$$f(r) = \int_0^\infty u\,du \int_0^\infty f(\tau) J_m(u\tau) J_m(ur) \tau d\tau,$$

$$F(r) = \int_0^\infty u\,du \int_0^\infty F(\tau) J_m(u\tau) J_m(ur) \tau d\tau$$

и подставляя последние выражения в (16), приходим к соотношению

$$f(\tau) = -\frac{4\pi G n \rho_0}{I'_m(kR)} \frac{F(\tau)}{u^2 + k^2} = -\frac{4\pi G n \rho_0}{I'_m(kR)} \frac{e^{-\frac{n}{R}\tau} I'_m(k\tau)}{(u^2 + k^2)} = -\frac{cF(\tau)}{u^2 + k^2}.$$

Следовательно,

$$f(r) = \int_0^R F(\tau) \tau d\tau \int_0^\infty J_m(ru) J_m(\tau u) \frac{u\,du}{u^2 + k^2}.$$

Пользуясь, далее, известными соотношениями цилиндрических функций [8]

$$K_m(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2} i m \pi} H_m^{(1)}(iz), \qquad I_m(z) = e^{-\frac{1}{2} i m \pi} J_m(iz),$$

$$\int_0^\infty J_m(ax) J_m(bx) \frac{x dx}{x^2 - r^2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi i J_m(br) H_m^{(1)}(ar) & a > b \\ \frac{1}{2}\pi i J_m(ar) H_m^{(1)}(br) & a < b, \end{cases}$$

после некоторых преобразований получаем искомое выражение для частного решения $f(r)$ в виде

$$f(r) = -\left\{K_m(kr)\int_0^r F(\tau) I_m(k\tau)\tau d\tau + J_m(kr)\int_r^R F(\tau) K_m(k\tau)\tau d\tau\right\} c. \quad (17)$$

Постоянные A и B в уравнении (15) находятся из требования непрерывности потенциала и его первой производной на возмущенной поверхности цилиндра, т. е. из граничных условий (8). Проводя вычисления (которые мы здесь опускаем) с точностью до первого порядка относительно ε, напишем выражение для интересующей нас постоянной

$$A = -4\pi G R \rho_0 e^{-n} K_m(kR).$$

Таким образом, изменение гравитационного потенциала (15) принимает вид

$$\delta V = -4\pi G \rho_0 e^{-n}\left\{R K_m(x) I_m(kr) + \frac{n e^n}{R I_m'(x)}\left[K_m(kr)\int_0^r F(\tau) I_m(k\tau)\tau d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + I_m(kr)\int_r^R F(\tau) K_m(k\tau)\tau d\tau\right]\right\}\varepsilon \cos m\theta \cos kz, \quad (18)$$

где $x = kR$.

Подставляя (9), (13), (18) в формулу (5), легко убедиться, что объемный интеграл обращается в нуль, а поверхностный интеграл с точностью до второго порядка относительно ε дает

$$\delta W = \beta_m \pi^2 G R^2 \rho^2(n)\left\{\frac{e^n - n - 1}{n^2} - K_m(x)\left[I_m(x) + S_{nm}(x)\right]\right\}\varepsilon^2. \quad (19)$$

Здесь

$$\rho(n) = \rho_0 e^{-n}, \qquad \beta_m = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad m = 0 \\ 1 & \text{при} \quad m \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$S_{nm}(x) = n\int_0^1 e^{n(1-u)} \frac{I_m'(xu)}{I_m'(x)} I_m(xu) u du. \quad (21)$$

С помощью (12) находим, что

$$\frac{1}{2}\int \rho\xi^2 dV = \beta_m \frac{\pi R^2\rho(n)}{4xI'_m(x)}\left[I_m(x)+S_{nm}(x)\right]\varepsilon^2. \tag{22}$$

Наконец, подставляя (22) и (19) в (3), находим искомое выражение для дисперсионного уравнения в виде

$$\frac{I_m(x)+S_{nm}(x)}{xI'_m(x)}\frac{\omega_{nm}^2}{4\pi G\rho(n)} = \frac{e^n-n-1}{n^2} - K_m(x)\left[I_m(x)+S_{nm}(x)\right], \tag{23}$$

которое при $n=0$ переходит в результат Р. С. Оганесяна для однородного цилиндра [2]:

$$\omega_{0m}^2 = 4\pi G\rho_0 \frac{xI'_m(x)}{I_m(x)}\left[\frac{1}{2} - K_m(x)I_m(x)\right]. \tag{24}$$

Если одновременно и $m=0$ (симметричные колебания), то из (23) мы получаем хорошо известный результат Чандрасекара и Ферми [1]

$$\omega_{00}^2 = 4\pi G\rho_0 \frac{xI'_0(x)}{I_0(x)}\left[\frac{1}{2} - K_0(x)I_0(x)\right]. \tag{25}$$

Запишем уравнение (23) в форме, удобной для исследования

$$\omega_{nm}^2(x) = \frac{2GM}{R^2}x\frac{I'_m(x)}{F(n)}\left\{\frac{F(n)}{I_m+S_{nm}} - K_m\right\}. \tag{26}$$

Здесь $M = 2\pi R^2\rho(n)F(n)$ — масса единицы длины неоднородного цилиндра, а

$$F(n) = \frac{e^n-n-1}{n^2}.$$

Вопрос устойчивости, в равной мере, и неустойчивости определяется согласно (4) знаком $\omega_{nm}^2(x)$. Причем, действительным значениям ω_{nm} ($\omega_{nm}^2>0$) соответствует устойчивость, а мнимым ω_{nm} ($\omega_{nm}^2<0$) — неустойчивость. Чтобы выяснить это обстоятельство, оценим интеграл (21). Его можно написать в виде

$$S_{nm}(x) = \frac{ne^n}{I_m(x)}\int_0^1 f(u)\,g(u)\,du.$$

Здесь $f(u) = I'_m(xu)I_m(xu)$ — монотонно возрастающая, неотрицательная, а $g(u) = ue^{-nu}$ интегрируемая в промежутке (0, 1) функции. Поэтому применяя вторую теорему о среднем, мы получаем, что

$$S_{nm}(x) = I_m(x)\,n\int_\xi^1 ue^{n(1-u)}du \quad (0<\xi<1).$$

Имея также ввиду, что функцию $F(n)$ можно представить в виде

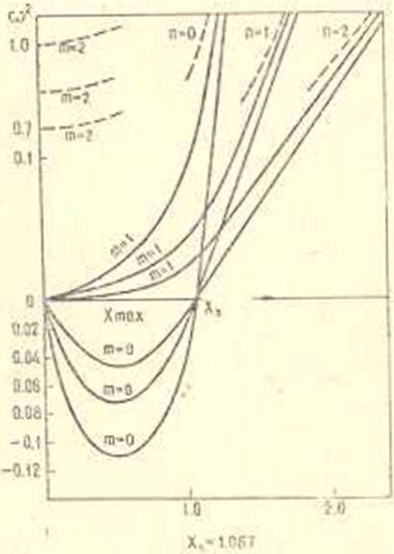
$$F(n) = \frac{1}{2}\left\{1 + n\int_0^1 e^{n(1-u)}\, u^2 du\right\},$$

уравнение (26) может быть записано в следующем виде:

$$\omega^2_{nm}(x) = \frac{GM}{R^2}\, x\, \frac{I'_m(x)}{I_m(x)}\, \frac{1}{F(n)}\, \{C_n(\xi) - 2K_m(x)\, I_m(x)\}. \tag{27}$$

Пользуясь, далее, известными асимптотическими значениями бесселевых функций, для $\omega^2_{nm}(x)$ получаем

$$\left.\begin{array}{l}
\omega^2_{nm} = \dfrac{GM}{R^2F(n)}\begin{cases} m\left[C_n(\xi) - \dfrac{1}{m}\right] & \text{при } x \to 0 \\ x\left[C_n(\xi) - \dfrac{1}{x}\right] & \text{при } x \to \infty \end{cases} \\
\omega^2_{n0} = \dfrac{GM}{R^2F(n)}\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}\left[C_n(\xi) + \ln\dfrac{x}{2} + \gamma\right] & \text{при } x \to 0 \\ x\left[C_n(\xi) - \dfrac{1}{x}\right] & \text{при } x \to \infty. \end{cases}
\end{array}\right\} \tag{28}$$



Фиг. 1.

Принимая в среднем $\xi = 1/2$, заметим, что отношение

$$C_n(\xi) = \frac{1 + n\int_0^1 u^2 e^{n(1-u)}\, du}{1 + n\int_0^1 u e^{n(1-u)}\, du}$$

при небольших n $(0 \leqslant n < 2)$ мало отличается от единицы.

Иллюстрация зависимости (27) при некоторых фиксированных значениях параметров m и n показана на фиг. 1. Анализируя характер этой зависимости, мы видим, что гравитирующий цилиндр с неоднородным распределением плотности вида (1) устойчив ($\omega^2_{nm} > 0$) по отношению ко всем несимметричным колебаниям ($m \neq 0$), причем частота колебаний возрастает с ростом m и уменьшается с увеличением n. Неустойчивость ($\omega^2_{nm} < 0$) возможна только при симметричных ($m = 0$) деформациях, если $x < x_*$, где x_* — единственный корень уравнения

$$C_n(\xi) - 2I_0(x)\, K_0(x) = 0.$$

Максимальное значение $\omega^2_{0\pi}$ в области $0 \leqslant x \leqslant x_*$, являясь характеристикой скорости нарастания амплитуды, уменьшается с ростом градиента плотности. Действительно. при $n = 0, 1, 2$ получаем для $|\omega_{0n}^2|_{\max}$ соответственно значения 0,112; 0,067; 0,048 (см. фиг. 1).

Разумеется, что время релаксации ($\tau = \omega_{\max}^{-1}$) увеличивается с возрастанием n.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Оганесяну Р. С. за ценные указания и дискуссии при выполнении работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 26 III 1963

Վ. Հ. Վարդանյան

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՅԻ ԳՐԱՎԻՏԱՑԻՈՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված է այն հարցը, թե ինչպես է ազդում խտության անհամասեռ բաշխվածությունը հեղուկ գլանի գրավիտացիոն կայունության վրա, երբ նրա մակերևույթը ենթարկվում է $r = R + \varepsilon \cos m\theta \cos kz$ *տիպի դեֆորմացիայի։*

Ուսումնասիրությունը կատարված է գծային մոտավորության սահմաններում և հաստատված է, որ խտության էքսպոնենցիալ բաշխումը՝ $\rho = \rho_0 \exp\left\{-n \frac{r}{R}\right\}$ *ազդում է գլխավորապես տատանման հաճախականության վրա կայունության գոտում և ամպլիտուդի աճման արագության վրա՝ անկայունության գոտում։ Ընդ որում երկուսն էլ փոքրանում են խտության գրադիենտի՝ n-ի աճմանը զուգընթաց։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чандрасекар С.* и *Ферми Э.* Проблемы гравитационной устойчивости в магнитном поле. Проблемы современной физики, 2, 1954.
2. *Оганесян Р. С.* О гравитационной устойчивости цилиндрической конфигурации. Астрономический журнал, **33**, вып. 6, 1956.
3. *Хайд Р.* Волны в тяжелой, вязкой, несжимаемой жидкости, проводящей электричество при наличии магнитного поля. Проблемы современной физики, №7, 1957.
4. *Варданян В. А.* и *Оганесян Р. С.* К теории устойчивости плоского слоя гравитирующей жидкости при наличии магнитного поля. ПММ, **26**, вып. 1, 1962.
5. *Варданян В. А.* и *Оганесян Р. С.* К теории магнитогравитационной устойчивости сферы с переменной плотностью. Астрономический журнал, **40**, вып. 4, 1963.
6. *Фримен Э. А.* и *Калсруд Р. М.* Проблемы магнитогидродинамики. Проблемы механики (сборник статей). ИЛ., М., 1961.
7. *Идельсон Н. И.* Теория потенциала. ОНТИ, НКТП, Л.-М., 1936.
8. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. ИЛ, М., 1949.