

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. М. Болотовский, Д. М. Седракан

Излучение частицы от открытого конца волновода

При пролете заряженной частицы через открытый конец полубесконечного металлического волновода часть поля, связанная с движущейся частицей, отрывается от частицы и распространяется в виде электромагнитного излучения. Ниже мы рассмотрели излучение, вызванное движением частицы параллельно оси цилиндрического металлического волновода.

Рассмотрим круглый волновод радиуса a , открытый с одного конца. Стенка волновода (мы будем считать ее идеально проводящей и бесконечно тонкой) расположена при $r=a$, $z>0$, где r , φ , z суть цилиндрические координаты. Пусть заряженная точечная частица движется параллельно оси волновода на расстоянии r_0 от нее ($r_0 < a$). Скорость частицы обозначим через v . Мы будем считать, что излучение настолько мало, что изменением скорости частицы можно пренебречь.

Чтобы найти поля излучения, необходимо решить уравнения Максвелла при граничных условиях, налагаемых наличием идеально проводящей поверхности цилиндрического волновода. Решение уравнения Максвелла можно искать в виде суммы двух полей: поля, связанного с движением частицы в пустоте и поля, вызванного токами, индуцированными заряженной частицей на боковой поверхности волновода. Векторный потенциал $\vec{A}^0$ и скалярный потенциал φ^0 движущейся частицы в пустоте имеют вид

$$A_z^0(\vec{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_z(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \varphi^0(\vec{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^0(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$A_z^0(\omega) = \frac{e}{\pi c} K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} |\vec{r} - \vec{r}_0|\right) e^{i\frac{\omega}{v} z}, \quad \varphi^0 = \frac{1}{\beta} A_z, \quad (1)$$

$$A_r^0(\vec{r}, z, t) = A_\varphi^0(\vec{r}, z, t) = 0.$$

Используя теорему сложения* Бесселевых функций

$$K_0\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} |\vec{r} - \vec{r}_0|\right) = \sum_m I_m\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} r_0\right) K_m\left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} r\right) e^{im\varphi}$$

и введя обозначения $\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$, $k = \frac{\omega}{c}$, выражение (1) можно переписать так:

$$A_z^0(k) = \sum_m A_{z,m}^0(k) e^{im\varphi},$$

$$A_{z,m}^0(k) = \frac{e}{\pi c} I_m(k\gamma r_0) K_m(k\gamma r) e^{i\frac{\omega}{c}z} \quad (2)$$

Поля, вызванные индуцированными заряженной частицей токами естественно будут иметь такую же зависимость от φ , как и поле свободной частицы, движущейся параллельно оси z . Кроме того эти поля должны быть решениями однородного волнового уравнения, удовлетворяющими граничным условиям задачи. Эти добавочные поля при $m \neq 0$ мы будем, следуя Л. А. Вайнштейну, называть несимметричными электромагнитными волнами. Несимметричные электромагнитные волны можно описывать двумя скалярными функциями („функции Герца“), одна из которых связана с наличием продольной компоненты электрического поля, а другая — с наличием продольной компоненты магнитного поля (E —волны и H —волны). Эти скалярные функции можно искать в следующем виде:

$$\Pi(r, z, \varphi) = \sum_m \Pi_m(r, z) e^{im\varphi},$$

$$\Pi'(r, z, \varphi) = \sum_m \Pi'_m(r, z) e^{im\varphi}. \quad (3)$$

Тогда векторный потенциал поля $\vec{A}$ выражается через эти функции следующим образом:

$$\vec{A} = \sum_m \vec{A}_m e^{im\varphi}, \quad (4)$$

$$\vec{A}_m = -\frac{i}{k} \text{rot rot}(\vec{n} \Pi_m) + \text{rot}(\vec{n} \Pi'_m), \quad \text{div} \vec{A} = 0, \quad \varphi = 0,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор по направлению Oz . Имея векторный потенциал $\vec{A}$, легко найти электромагнитные векторы полей излучения по формулам

$$\vec{E} = \sum_m \vec{E}_m e^{im\varphi}, \quad \vec{H} = \sum_m \vec{H}_m e^{im\varphi},$$

$$\vec{E}_m = \text{rot rot}(\vec{n} \Pi_m) + ik \text{rot}(\vec{n} \Pi'_m),$$

$$\vec{H}_m = -ik \text{rot}(\vec{n} \Pi_m) + \text{rot rot}(\vec{n} \Pi'_m).$$

Функции $\Pi_m(r, z)$ и $\Pi'_m(r, z)$ должны удовлетворять однородному волновому уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \Pi = 0 \quad (5)$$

кроме того, при $r = a, z > 0$, то есть на идеально проводящей бесконечно тонкой стенке трубы, $\Pi_m(r, z)$ и $\frac{\partial \Pi_m(r, z)}{\partial r}$ должны быть непрерывны, как это следует из связи $\Pi_m(r, z)$ и $\Pi_m(r, z)$ с электромагнитными полями. Решение уравнения (6) при таких условиях дает

$$\begin{aligned}\Pi_m(r, z) &= -\frac{2\pi^2 a}{ck} \int_c e^{izx} \left\{ \frac{I_m(vr) H_m(va)}{H_m(vr) I_m(va)} \right\} \Pi_m(x) dx, \\ \dot{\Pi}_m(r, z) &= -i \frac{2\pi^2 a}{c} \int_c e^{izx} \left\{ \frac{I_m(vr) \dot{H}_m(va)}{H_m(vr) \dot{I}_m(va)} \right\} \frac{\dot{\Pi}_m(x)}{v} dx, \quad (7)\end{aligned}$$

где $v = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, $\text{Im } v > 0$. Здесь контур c есть контур в плоскости комплексного переменного x , который мы проводим по вещественной оси, обходя полюс $\frac{m}{v}$ снизу, причем для определенности $\text{Im } k > 0$.

В формуле (7) верхние строки в фигурных скобках соответствуют точкам $r < a$, а нижние $r > a$. Таким образом, задача сводится к определению двух неизвестных функций $\Pi_m(x)$ и $\dot{\Pi}_m(x)$. Для определения этих функций мы должны пользоваться граничными условиями задачи. Граничные условия задачи требуют равенства нулю тангенциальных компонент полного электрического поля на стенке трубы:

$$\begin{aligned}(E_{\varphi, m})_{r=a} &= -(E_{z, m}^0)_{r=a} \quad \text{при } z > 0, \\ (E_{z, m})_{r=a} &= -(E_{\varphi, m}^0)_{r=a} \quad \text{при } z > 0.\end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7) в формулы (5), мы найдем $E_{\varphi, m}$ и $E_{z, m}$. С другой стороны, при помощи (1) и (2) определим $E_{\varphi, m}^0$ и $E_{z, m}^0$. Подставляя эти выражения в (8), получаем два интегральных уравнения для неизвестных функций $\Pi_m(x)$ и $\dot{\Pi}_m(x)$

$$\int_c v L_1(x) \Pi_m(x) e^{izx} dx = \frac{ick^2}{2\pi} L_m e^{i \frac{m}{v} z} \quad \text{при } z > 0,$$

$$\left[\frac{\pi x L_1(x)}{ka^2 v} \Pi_m(x) - \frac{L_2(x)}{v} \dot{\Pi}_m(x) \right] e^{izx} dx = -\frac{imc L_m}{ka^2 2\pi} e^{i \frac{m}{v} z} \quad \text{при } z > 0. \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}L_1(x) &= \pi va I_m(va) H_m(va), & L_m &= -\frac{e}{\pi c} I_m(k_1 r_0) K_m(k_1 a), \\ L_2(x) &= \pi va \dot{I}_m(va) \dot{H}_m(va),\end{aligned}$$

Для получения замкнутой системы уравнений нам нужны еще два уравнения. Индуцированные токи, которые вызывают поля излучения, можно выразить через функции $\Pi_m(x)$ и $\dot{\Pi}_m(x)$ следующим образом:

$$j_{z,m} = \int_c e^{iaz} \dot{\Pi}_m(z) dz,$$

$$j_{z,m} = \int_c \left[\Pi_m(z) + \frac{mz}{av^2} \dot{\Pi}_m(z) \right] e^{iaz} dz. \quad (10)$$

Вторую пару интегральных уравнений можно получить из требований, что на продолжении стенки трубы токи равняются нулю, то есть $j_{z,m} = j_{z,m} = 0$ при $r = a$, $z < 0$. Тогда мы получим:

$$\int_c \dot{\Pi}_m(z) e^{iaz} dz = 0 \quad \text{при } z < 0,$$

$$\int_c \left[\Pi_m(z) + \frac{mz}{av^2} \dot{\Pi}_m(z) \right] e^{iaz} dz = 0 \quad \text{при } z < 0. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) и являются замкнутой системой парных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $\Pi_m(z)$ и $\dot{\Pi}_m(z)$.

Решение системы парных интегральных уравнений (9) и (11) можно провести, если исследовать аналитические свойства этих неизвестных функций, требуемых уравнениями. Во-первых, мы предполагаем, что можно функции $L_1(z)$ и $L_2(z)$ представить в виде произведения двух функций, которые голоморфны и не имеют нулей соответственно в верхней и нижней полуплоскости комплексного переменного z , то есть

$$L_1(z) = L_1^+(z) L_1^-(z),$$

$$L_2(z) = L_2^+(z) L_2^-(z), \quad (12)$$

где $L_1^+(z)$ и $L_2^+(z)$ — голоморфные функции, не имеющие нулей при $\text{Im } z > 0$, а $L_1^-(z)$ и $L_2^-(z)$ — соответственно голоморфные функции, не имеющие нулей при $\text{Im } z < 0$. Тогда из первого уравнения (11) видно, что $\dot{\Pi}_m(z)$ должна быть голоморфной в нижней полуплоскости z . С другой стороны, чтобы искомые функции удовлетворяли второму уравнению (11) и уравнению (9), функция $\Pi_m(z)$ должна быть голоморфной в нижней полуплоскости, кроме точки $z = -k$ в нижней полуплоскости и $z = \frac{\omega}{v}$ в верхней полуплоскости, где она должна иметь простые полюса. Учитывая эти соображения, легко видеть, что функции $\Pi_m(z)$ и $\dot{\Pi}_m(z)$ нужно искать в следующем виде [1]:

$$\Pi_m(z) = \frac{1}{1 - k - z L_1^-(z)} \left[\frac{P_1}{z - \frac{\omega}{v}} + \frac{P_2}{k + z} \right],$$

$$\dot{\Pi}_m = \frac{iP'}{1 - k - z L_2^-(z)}, \quad (13)$$

где P_1 , P_2 и P' — постоянные коэффициенты.

Для определения этих коэффициентов достаточно решения (13) подставить в уравнения (9) и (11). Тогда из первого уравнения (7) мы получим

$$P_1 = e L_m \left(\frac{k \gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{k + \frac{\omega}{v} L_1^+ \left(\frac{\omega}{v} \right)}} \quad (14)$$

Из уравнений (9) и (10) мы получаем два алгебраических уравнения для определения P_2 и P'

$$kP' + \Delta \left(\frac{2k}{k - \frac{\omega}{v}} P_1 + P_2 \right) = 0, \\ P_2 = \Delta k P', \quad (15)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{im L_1^+(k)}{2ak L_2^+(k)}.$$

Решая уравнение (15) относительно P_2 и P' , получим

$$P_2 = - \frac{\Delta^2 \frac{2k}{k - \frac{\omega}{v}}}{1 + \Delta^2} P_1, \quad P' = - \frac{\Delta \frac{2}{k - \frac{\omega}{v}}}{1 + \Delta^2} P_1. \quad (16)$$

Таким образом, (13) совместно с (14) и (16) дает полное решение системы уравнений (9) и (11).

В частном случае, когда частица движется по оси волновода, то есть когда $r_0 = 0$, все члены в сумме (3) для $m \neq 0$ отпадают из-за общего множителя $I_m(0) = 0$ при $m \neq 0$, и остается единственный член с $m = 0$. Поэтому найденные нами коэффициенты $P_2 = P' = 0$. Таким образом, в случае симметричной задачи поля излучения описываются одной скалярной функцией, которая имеет вид [2]

$$\Pi_0(z) = \frac{P_1}{L_1^-(z)} \frac{1}{k - \alpha \left(\alpha - \frac{\omega}{v} \right)}, \quad (13') \\ P_1 = - \frac{e}{\pi} \left(\frac{k \gamma}{2\pi} \right)^2 \frac{K_0(k \gamma a)}{\sqrt{k + \frac{\omega}{v} L_1^+ \left(\frac{\omega}{v} \right)}}.$$

В окончательных выражениях мы всегда считаем параметр $\chi = ak$ действительным положительным числом, тогда факторизация функций $L_1(z)$ и $L_2(z)$ дается формулами [1]

$$L_1^+(z) = L_1^-(-z) = \sqrt{\pi(\chi + z)} I_m(va) H_m(va) \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\sqrt{p} + z}{\sqrt{p} - z} e^{\frac{1}{2} S_p(z)}, \\ L_2^+(z) = L_2^-(-z) = \sqrt{\pi(\chi + z)} I_m(va) H_m(va) \prod_{p=1}^{\infty} \frac{\sqrt{p} + z}{\sqrt{p} - z} e^{\frac{1}{2} S_p'(z)}.$$

где $\gamma_p = \sqrt{\chi^2 - \mu_p^2}$ ($\text{Im } \gamma_p > 0$ при $\text{Im } \chi > 0$) и $\gamma'_p = \sqrt{\chi^2 - \mu_p^2}$ ($\text{Im } \gamma'_p > 0$ при $\text{Im } \chi > 0$); ν_p и μ_p — корни уравнений $I_m(\nu) = 0$ и $I_m(\mu) = 0$, n — наибольший индекс ν_p , для которого имеет место $\nu_n < \chi < \nu_{n+1}$, а n' — наибольший индекс μ_p , для которого имеет место $\mu_{n'} < \chi < \mu_{n'+1}$.
 функции $S(z)$ и $S'(z)$ определяются формулой

$$S(z) = X(z) + iY(z),$$

$$X(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma_N}^{\gamma_N} \frac{\Omega(v) dv}{w - z},$$

$$Y(z) = \frac{2z}{\pi} - \Omega(z) + \frac{1}{i} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{p=n+1}^{\infty} \ln \frac{\gamma_p + 1}{\gamma_p - 1} - \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma_N}^{\gamma_N} \frac{\Omega(v) dv}{w - z} \right\}.$$

Для функции $S(z)$ $\Omega(v)$ имеет вид

$$\Omega(v) = \arg H_m(v) + \frac{\pi}{2}, \quad \Omega(0) = 0, \quad \Omega(\nu_p) = p\pi.$$

Для функции $S'(z)$ $\Omega'(v)$ имеет вид

$$\Omega'(v) = \arg H'_m(v) - \frac{\pi}{2}, \quad \Omega'(0) = 0, \quad \Omega'(\mu_p) = (p-1)\pi.$$

Для определения полей излучения на больших расстояниях, так как они выражаются через функции $\Pi_m(r, z)$ и $\Pi'_m(r, z)$, мы найдем асимптотический вид этих функций в волновой зоне, точнее вне волновода на таких расстояниях от его конца, что

$$kR \gg 1, \quad kR \sin \vartheta \gg 1,$$

где R — расстояние от конца волновода, а ϑ — угол между R и осью z . При таких условиях можно провести интегрирование в (7) по методу перевала, и тогда получим

$$\begin{aligned} \Pi_m(R, \vartheta) &= -\frac{4\pi^2 a}{kc} I_m(ka \sin \vartheta) \Pi_m(k \cos \vartheta) \frac{e^{ikR - \frac{im\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}}}{R}, \\ \Pi'_m(R, \vartheta) &= -\frac{4\pi^2 a}{kc} i I'_m(ka \sin \vartheta) \Pi'_m(k \cos \vartheta) \frac{e^{ikR - \frac{im\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}}}{\sin \vartheta \cdot R}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как видно из (17), поля излучения в волновой зоне являются сферическими расходящимися волнами. Легко показать, что электромагнитные поля излучения на таких расстояниях выражаются через $\Pi_m(R, \vartheta)$ и $\Pi'_m(R, \vartheta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{\theta, m} &= -E_{\varphi, m} = k^2 \sin \vartheta \Pi_m(R, \vartheta), \\ H_{\varphi, m} &= E_{\theta, m} = -k^2 \sin \vartheta \Pi'_m(R, \vartheta). \end{aligned} \quad (18)$$

Имея поля на больших расстояниях, легко найти интенсивность излучения и его угловое распределение. Для этого мы должны проинтегрировать поток вектора Пойтинга по поверхности сферы с большим радиусом R .

Это даст

$$I_{\omega} = \frac{c}{8\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [|E_{\varphi}|^2 + |H_{\varphi}|^2] R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dt = \\ = \frac{ck^4}{8\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [|\Pi|^2 + |\Pi'|^2] R^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\varphi dt. \quad (19)$$

Подставляя в (19) выражения $\Pi_m(R, \vartheta)$, $\Pi'_m(R, \vartheta)$ из (17) и имея в виду формулы (3), (13), (14), (16), далее интегрируя по φ , мы получим спектральное и угловое распределение интенсивности излучения

$$I_{\omega, \vartheta} = \frac{32\pi^5 a^2 k^2}{c} \sin^3 \vartheta \sum_m \left\{ |J_m(ka \sin \vartheta) \Pi_m(k \cos \vartheta)|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{J'_m(ka \sin \vartheta) \Pi'_m(k \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \right|^2 \right\}. \quad (20)$$

Рассмотрим излучение частицы при малых отклонениях от оси волновода. Ясно, что основное излучение будет в этом случае симметричным ($m=0$), а вклад несимметричного излучения будет мал. Действительно, в формуле (20) член, зависящий от r_0 , входит в виде множителя $J_m^2(k\gamma r_0)$; если его разложить по $(k\gamma r_0)$ для малых значений аргумента и ограничиться первыми двумя не исчезающими членами разложения, то все высшие гармоники отпадут и в излучение вступит вклад только гармоники с $m=0, 1$ (пренебрегаем членами порядка $(k\gamma r_0)^4$ и выше). Тогда формулу (20) можно написать так:

$$I_{\omega, \vartheta} = \frac{32\pi^5 a^2 k^2}{c} \sin^3 \vartheta \left\{ K_0^2(k\gamma a) J_0^2(ka \sin \vartheta) \Pi_0^2(k\gamma a) + \right. \\ \left. + \left(\frac{k\gamma r_0}{2} \right)^2 \left[K_1^2(k\gamma a) \left(J_1^2(ka \sin \vartheta) \Pi_1^2(k \cos \vartheta) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{J_1^2(ka \sin \vartheta) \Pi_1^2(k \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \right) - 2K_0^2(k\gamma a) J_0^2(ka \sin \vartheta) \Pi_0^2(k\gamma a) \right] \right\}. \quad (21)$$

Легко видеть, что при $r_0=0$ выражение в квадратных скобках обращается в нуль, и формула дает излучение частицы при движении по оси волновода [2]

$$I_{\omega, \vartheta} = \frac{32\pi^5 a^2 k^2}{c} \sin^3 \vartheta K_0^2(k\gamma a) J_0^2(ka \sin \vartheta) \Pi_0^2(k \cos \vartheta). \quad (22)$$

Из вида формулы (21) следует, что при движении частицы по оси волновода потери на излучение либо минимальны, либо максимальны, в зависимости от знака выражения в квадратных скобках. Если про-

вести интегрирование по углам, тогда при положительном знаке интеграла от выражения в квадратных скобках окажется, что полное излучение при движении по центру минимально, в обратном случае — максимально.

ЦНИ Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 5 VII 1963

Բ. Մ. Բոլոտովսկի, Դ. Մ. Սեդրակյան

ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ԱԼԻԲԱՏԱՐԻ ԲԱՑ ԾԱՅՐԻՑ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ալիբատայի մեջ հեռադրուված է չիցբավորված մասնիկի հառադարձումը, երբ այն անցնում է կիսատանվերջ մետաղյա ալիբատարի բաց ծայրով, ալիբատարի առանցքին դուգահեռ՝ նրանից r_0 հեռավորության վրա։ Ցույց է տրված, որ հառադայվման դաշտերը նկարագրվում են երկու սկալյար ֆունկցիաների միջոցով, որոնց համար ստացված են հավասարումներ և լուծված են այդ հավասարումները։ Հաշվված են հառադայվման դաշտերը ալիբատարի ծայրից մեծ հեռավորությունների վրա։ Ստացված է հառադայվման ինտենսիվության անկյունային և համախաչին բաշխումը։ Ցույց է տրված, որ մասնավոր դեպքում, երբ $r_0 \rightarrow 0$, բոլոր բանաձևերը համընկնում են [2] ալիբատայի տրոյունքների հետ։ Հաշվված է հառադայվման ինտենսիվության բաշխումը, երբ մասնիկը շարժվում է առանցքին դուգահեռ՝ նրանից փոքր հեռավորությունների վրա։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Сов. Радио, М., 1953.
2. Болотовский Б. М. и Воскресенский Г. Ф. ЖТФ, в печати.