

З. А. Зорян

Краткосрочный прогноз поля атмосферного давления по двухуровневой схеме с неявными производными

В данной работе предлагается линеаризованная двухуровневая схема прогноза поля атмосферного давления методами гидродинамики. Исходными являются уравнения гидротермодинамики идеальной сжимаемой жидкости вне пограничных слоев, то есть для свободной атмосферы, при гипотезах квазистатичности и квазигеострофичности, в случае адиабатических процессов.

Как известно [1], при таких достаточно обоснованных предположениях система дифференциальных уравнений гидротермодинамики относительно геопотенциала принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi - \frac{f^2}{P} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = \left(\frac{\Delta \Phi}{l} + l, \Phi \right), \quad (1)$$

$$\zeta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \zeta} + \frac{c^2}{P} \tau = \frac{\zeta}{l} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \Phi \right). \quad (2)$$

В этой системе (1) является уравнением неразрывности в квазигеострофическом приближении, а (2)—уравнением притока тепла в квазигеострофическом приближении с учетом квазистатичности без учета притока тепла извне.

В качестве краевых условий по ζ принимаются, как обычно [1],

$$\tau = \frac{P}{RT_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{при} \quad \zeta = 1, \quad (3)$$

$$\tau = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0. \quad (4)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

Φ —геопотенциал, $\zeta = \frac{P}{P}$ —безразмерная переменная, P —давление, P —стандартное давление в 1000 мб, $l = 2\omega \cos \theta$ —параметр Корiolиса, $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$ —величина угловой скорости Земли, g —ускорение силы тяжести, θ —дополнение до широты φ , $c^2 = aRT$, $a = \frac{R}{g} (\gamma_a - \gamma_1)$, R —газовая постоянная, T_1 и γ_1 —средние значения.

величин T и γ , соответственно, T —температура, γ —вертикальный температурный градиент, γ_a —адиабатический вертикальный температурный градиент, ρ —плотность воздуха.

$$\tau = \rho \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - g w \right),$$

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \beta = \frac{dl}{dy}.$$

В качестве координатных осей приняты x, y, ζ , начало координат расположено на поверхности земли, причем x направлена по касательной круга широт на восток, y —по меридиану на север.

Вся атмосфера мысленно разбивается на пять уровней: ($k=0, 1 \dots 4$); $\zeta=0; 0,3; 0,5; 0,7$; (300, 500 и 700 мб) и $\zeta=1$, причем $k=0$ соответствует $\zeta=0$. Основными являются 700 и 300 мб, остальные являются промежуточными.

В уравнениях (1) и (2) производные по ζ заменяются конечными разностями

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right)_k \approx \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{\delta \zeta}, \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \right)_k \approx \frac{\tau_{k+1} - \tau_{k-1}}{\delta \zeta}.$$

Записывая уравнение (1) для уровней 700 мб ($k=3$) и 300 мб ($k=1$), а уравнение (2)—для уровней 500 мб ($k=2$), получим следующую систему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi_3 - \frac{l^2}{P} \frac{\tau_4 - \tau_2}{\delta \zeta} = \left(\frac{\Delta \Phi_3}{l} + l, \Phi_3 \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi_1 - \frac{l^2}{P} \frac{\tau_3 - \tau_5}{\delta \zeta} = \left(\frac{\Delta \Phi_1}{l} + l, \Phi_1 \right), \quad (6)$$

$$\frac{\tau_2}{\delta \zeta} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) + \frac{c_2^2}{P} \frac{\tau_2}{\delta \zeta} = \frac{\tau_2}{l \delta \zeta} (\Phi_3, \Phi_1), \quad (7)$$

где приближенно принимается

$$\Phi_2 \approx \frac{\Phi_1 + \Phi_3}{2}.$$

Краевые условия следующие:

$$\tau_0 = 0 \quad \text{и} \quad \tau_4 = \frac{P}{RT_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \approx k^2 \frac{P}{RT_1} \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}. \quad (8)$$

В граничном условии (8), значение Φ_1 эмпирическим путем меняется через Φ_3 [2].

Исключая из системы (5)–(7) τ_2 , с учетом граничных условий (8), получим

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = (B_1 + l, \Phi_1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial t} = (B_3 + l, \Phi_3), \quad (10)$$

$$Q_1 = \Delta \Phi_1 - M^2 (\Phi_1 - \Phi_3),$$

$$Q_3 = \Delta \Phi_3 + M^2 (\Phi_1 - \Phi_3) - \mu^2 \Phi_3,$$

$$B_1 = \frac{1}{l} (Q_1 + m \Phi_1),$$

$$B_3 = \frac{1}{l} (Q_3 + m \Phi_3),$$

$$M^2 = \frac{l^2}{c_2^2} \left(\frac{\tau_2}{\partial \tau} \right)^2, \quad \mu^2 = \frac{k^2 l^2}{R T_1},$$

l — постоянная, которую подберем позже, c_2 — значение c на уровне 50 мб.

Линеаризируем уравнения (9) и (10). Для этого раскроем якобиан и введем вместо горизонтальных градиентов геопотенциала географический ветер

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial A_i}{\partial x} + v \frac{\partial A_i}{\partial y} = f_i, \quad (11)$$

$$A_i = B_i + l, \quad f_i = \frac{m}{l} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}.$$

Введем новые переменные

$$X = x - \int_0^t u_i(x, y, t) dt, \quad Y = y - \int_0^t v_i(x, y, t) dt, \quad T = t,$$

$$A_i(x, y, t) = \bar{A}_i(X, Y, T), \quad f_i(x, y, t) = \bar{f}_i(X, Y, T).$$

Тогда вместо (11) будем иметь

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial T} - \bar{f}_i = \bar{u}_i \left(\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial X} - \frac{\partial A_i}{\partial x} \right) + \bar{v}_i \left(\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial Y} - \frac{\partial A_i}{\partial y} \right). \quad (12)$$

Если по времени выберем таким, чтобы члены, стоящие в правой части уравнения (12) были бы, по крайней мере, на порядок меньше, чем левая часть,

$$\delta t \ll \frac{2\delta s}{5u_{\max}}, \quad (13)$$

тогда вместо уравнения (12) получим приближенно

$$\bar{A}_i(X, Y, \delta t) - \delta t \bar{f}_i = \bar{A}_i(X, Y, 0).$$

Переходя к старым переменным, будем иметь

$$A_i(x, y, \delta t) - \delta t f_i = A_i^0(x, y), \quad (14)$$

где

$$A_i^0 = (A_i)_{t=0}.$$

Правую часть уравнения (14) разлагаем в ряд Тейлора в окрестности точки (x, y) . При выбранном нами шаге δt можно брать лишь первые члены разложения, так как нелинейные члены, по крайней мере, на порядок меньше линейных. Тогда правая часть (14) будет линеаризована.

Беря значения u и v в будущий момент времени δt , то есть неявно (такая замена придает разностному дифференциальному уравнению вычислительную устойчивость [3]), вместо (14) получим

$$\tilde{Q}_i + a_i \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial \tilde{\Phi}_i}{\partial y} = -a_i \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial x} - b_i \frac{\partial \Phi_i^0}{\partial y}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i(x, y, \delta t) &= \Phi_i(x, y, \delta t) - \Phi_i^0(x, y), \\ a_i &= \delta t \left(\frac{\partial B_i^0}{\partial y} + \beta \right), \quad b_i = -\delta t \frac{\partial B_i^0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения (9) и (10) примут вид

$$\Delta \tilde{\Phi}_1 + a_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial y} - M^2 (\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_3) = -a_1 \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial x} - b_1 \frac{\partial \Phi_1^0}{\partial y} = -f_1^0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi}_3 + a_3 \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x} + b_3 \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial y} - M^2 (\tilde{\Phi}_3 - \tilde{\Phi}_1) - \\ - \mu^2 \tilde{\Phi}_3 = -a_3 \frac{\partial \Phi_3^0}{\partial x} - b_3 \frac{\partial \Phi_3^0}{\partial y} = -f_3^0. \end{aligned} \quad (17)$$

Следуя Н. И. Булееву, произвольную постоянную выбираем такой, чтобы исключить центральную точку при замене лапласиана конечными разностями. Как известно, это обеспечивает малую изменчивость B_i во времени по сравнению с Q_i [1]. Причем коэффициенты a_i и b_i для каждой точки аппроксимируются по большой площади, где стороны квадрата равны 2500 км.

Система дифференциальных уравнений (9) и (10) решается итерационным методом Либмана [1]

$$\tilde{\Phi}_{i,j,k}^{v+1} = \tilde{\Phi}_{i,j,k}^v + \alpha R_k(\tilde{\Phi}_{i,j}^{v+1}), \quad k=1; 3. \quad (18)$$

$$\begin{aligned} R_1(\tilde{\Phi}_{i,j}^{v+1}) &= A_{i,j,1} \tilde{\Phi}_{i+1,j,1}^v + B_{i,j,1} \tilde{\Phi}_{i-1,j,1}^{v+1} + C_{i,j,1} \tilde{\Phi}_{i,j+1,1}^{v+1} + D_{i,j,1} \tilde{\Phi}_{i,j-1,1}^v - \\ &- E_1 \tilde{\Phi}_{i,j,1}^v + F \tilde{\Phi}_{i,j,3}^v + (\delta s)^2 f_{i,j,1}^v, \end{aligned}$$

$$R_3(\tilde{\Phi}_{i,j}^{v+1}) = A_{i,j,3} \tilde{\Phi}_{i+1,j,3}^v + B_{i,j,3} \tilde{\Phi}_{i-1,j,3}^{v+1} + C_{i,j,3} \tilde{\Phi}_{i,j+1,3}^{v+1} + D_{i,j,3} \tilde{\Phi}_{i,j-1,3}^v -$$

$$-E_2 \bar{\Phi}_{i,j,3} + F \bar{\Phi}_{i,j,1} + (\partial s)^2 f_{i,j,3}^0, \quad (19)$$

$$A_{i,j,k} = 1 + \frac{\partial s}{2} a_{i,j,k}, \quad E_1 = 4 + (\partial s)^2 M^2,$$

$$B_{i,j,k} = 1 - \frac{\partial s}{2} a_{i,j,k}, \quad E_2 = 4 + (\partial s)^2 (M^2 + \mu^2),$$

$$C_{i,j,k} = 1 + \frac{\partial s}{2} b_{i,j,k}, \quad F = (\partial s)^2 M^2,$$

$$D_{i,j,k} = 1 - \frac{\partial s}{2} b_{i,j,k}, \quad \alpha = 0,3.$$

Время делается 16 шагов ($\partial t = 1,5$ часа); через каждые два шага производится сглаживание по формуле

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{i,j,k} = & \frac{5}{8} \Phi_{i,j,k} + \frac{1}{16} (\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j-1}) + \\ & + \frac{1}{32} (\Phi_{i+1,j+1} + \Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i+1,j-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Для численного расчета примеров приняты следующие значения:

$$\zeta_1 = 0,5; \quad \zeta_2 = 0,4; \quad \mu^2 = 0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2};$$

$$M^2 = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2}; \quad T_1 = 235^\circ; \quad \partial s = 0,25 \cdot 10^6 \text{ м};$$

$$l = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}; \quad \beta = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ м}^{-1} \text{ сек}^{-1}.$$

Расчеты проводились на электронной вычислительной машине ЭЦВМ-2* (полупроводниковая).

Сходимость итерационного процесса при заданной максимальной длине итераций в 0,03 джм при нулевом начальном приближении достигалась после 10—12 итераций, а при использовании в качестве начального приближения значений $\bar{\Phi}_i$, полученных на предыдущем шаге, — после 3 (в среднем) итераций.

Таким образом, вычисление прогноза на сутки достигается после 3 итераций и это требует 6—7 мин машинного времени.

Если эти результаты сравнить с [4], [5], то увидим, что сходимость итерационного процесса в 3 и более раза улучшается.

По неявной схеме (18)—(19) было рассчитано 5 примеров, результаты этих примеров приведены в табл. 1.

Здесь: r — коэффициент корреляции между вычисленными и фактическими суточными тенденциями; σ — среднеквадратичная ошибка в джм; σ_1 , σ_2 — стандарты прогнозируемой и фактической изменчивости в джм.

Для сравнения с расчетами по неявной схеме произведены также расчеты по явной схеме, а именно:

$$\Delta\tilde{\Phi}_1 - M^2(\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2) = -a_1 \frac{\partial\Phi_1^0}{\partial x} - b_1 \frac{\partial\Phi_1^0}{\partial y},$$

$$\Delta\Phi_2 - M^2(\tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1) - \mu^2\tilde{\Phi}_2 = -a_2 \frac{\partial\Phi_2^0}{\partial x} - b_2 \frac{\partial\Phi_2^0}{\partial y}.$$

Таблица 1
Статистическая оценка оправдываемости прогнозов
(февраль 1960 г.)

Дата прогноза	700 мб				
	r	σ	σ_x	σ_y	$\frac{\sigma}{\sigma_y}$
1 февраля	0,92	3,8	8,6	6,5	0,58
2 "	0,68	3,5	4,8	3,2	1,08
3 "	0,68	3,9	2,8	5,3	0,73
4 "	0,84	3,0	3,8	5,4	0,55
5 "	0,64	6,1	7,4	2,8	2,1

300 мб					
1 февраля	0,78	7,9	12,9	8,5	0,93
2 "	0,73	6,5	10,3	7,5	0,75
3 "	0,85	5,4	8,7	6,5	0,83
4 "	0,96	3,3	11,0	11,4	0,29
5 "	0,76	10,2	14,8	10,3	0,99

Система (21)–(22) также решается итерационным методом Либмана. Сходимость итерационного процесса на сутки достигается после 75–80 итераций, причем при нулевом начальном приближении сходимость на каждом шаге достигается также после 10–12 итераций, а при использовании в качестве начального приближения значений $\tilde{\Phi}_i$, полученных на предыдущем шаге, — после 4–5 итераций. Результаты расчетов по явной схеме приведены в табл. 2.

Приведенные в табл. 1 и 2 результаты расчетов произведены для внутренних 48 точек AT_{700} и AT_{300} .

Из сравнения табл. 1 и 2 видно, что, как правило, σ_x и σ_y по явной схеме всегда больше, чем таковые по неявной схеме, причем абсолютная ошибка σ иногда превышает 1,5 дкм.

По нашему мнению прогноз улучшится, если использовать активный анализ начальных данных.

По этой схеме можно также предсказать вертикальные токи.

Ниже приводится краткое описание AT_{700} и AT_{300} фактически предсказанных карт, рассчитанных по неявной схеме. Барическое поле на 700 мб можно характеризовать следующим образом: 31/1–60 районе Москвы имеется циклон глубиной 274 дкм, на северо-западе Скандинавии существует седловина.

1/II—60 г. циклон углубился до 272 дкм и переместился к югу, седловина над Скандинавией сузилась.

Обзор рассчитанной карты на 1/II—60 г. показывает, что седловина над Скандинавией предсказана правильно, циклон не предсказан, так как он находится вне области расчетной схемы.

Таблица 2

Статистическая оценка оправдываемости прогнозов по явной схеме (февраль 1960 г)

Дата прогноза	700 мб				
	r	σ	σ_x	σ_y	$\frac{\sigma}{\sigma_y}$
1 февраля	0,97	4,0	9,2	6,5	0,62
2 "	0,63	4,7	8,0	3,2	1,47
3 "	0,70	3,7	3,5	5,3	0,7
4 "	0,80	3,3	4,3	5,4	0,61
5 "	0,67	5,6	7,0	2,8	2,0

300 мб					
1 февраля	0,82	8,6	14,0	8,5	1,0
2 "	0,74	8,0	11,8	7,5	1,1
3 "	0,88	6,4	11,4	6,5	0,98
4 "	0,96	3,6	12,8	11,4	0,31
5 "	0,81	9,6	15,6	10,3	0,93

2/II—60 г. циклон углубился до 268 дкм и переместился к востоку на Уральский хребет. В районе Стамбула со стороны Средиземного моря появился циклон глубиной 292 дкм.

Над Скандинавией появился гребень. Предсказанная карта на 2/II—60 г. показывает, что гребень предсказан совершенно правильно.

3/II—60 г. в районе Курска появился циклон глубиной 280 дкм, который переместился из района Стамбула и углубился на 12 дкм. Прежний циклон переваливал через Уральский хребет. Гребень над Скандинавией распространяется к юго-востоку и расширяется.

Предсказанная карта на 3/II—60 г. показывает область циклоничности в районе Курска и правильно описывает распространение и расширение гребня с некоторым отставанием в повороте на юго-восток.

4/II—60 г. циклон наполнился на 8 дкм и расширился. Гребень продолжает перемещаться к юго-востоку, в районе Берлин—Калининград образовалась невысокая антициклоническая область.

Предсказанная карта на 4/II—60 г. правильно описывает перемещение гребня на юго-восток, несмотря на то, что в вышеупомянутой области контур антициклоничности не получен, это ничуть не

умалает предсказанный результат, так как всю ситуацию удалось предсказать правильно.

5/II—60 г. циклон над Ростовом глубиной 288 дкм без изменения разделился на две части, одна из которых переместилась в район Харькова, другая—на Крым. Антициклон уменьшился до 296 дкм и расширился на всю Европейскую часть Советского Союза.

Предсказанная карта на 5/II—60 г. показывает, что вышеупомянутые синоптические ситуации в общем уловлены. Действительно, в районе Харькова—Волгограда правильно предсказан циклон глубиной 288 дкм; несмотря на то, что антициклон получился 294 дкм, он занимает меньшую область по сравнению с тем, что фактически существует и находится в районе Минск—Рига. Хочется особо остановиться на этом примере, так как при таком бурном развитии антициклона фактическое поле за сутки мало изменилось— $\tau_y = 2,8$ дкм, а с другой стороны, средне-квадратичная ошибка σ получилась большой и в результате, несмотря на то, что коэффициент корреляции получился равным $r = 0,64$, $\frac{\sigma}{\sigma_y} = 2$, что ниже удовлетворительного.

Можно было описывать и карты AT_{300} как фактическую, так и предсказанную, но мы ограничимся выше рассмотренной. Отметим лишь, что предсказанные карты AT_{300} получены лучше, чем AT_{200} .

Работа была выполнена под руководством члена-корреспондента АН СССР И. А. Кибеля, которому автор приносит свою глубокую благодарность.

Институт водных проблем
АН Армянской ССР

Поступила 9VII 1961

Ձ. Լ. Զորյան

ՄԹՆՈԼՈՐՏԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԴԱՇՏԻ ԿԱՐՃԱԺԱՄԿԵՏ ԿԱՆԽԱԳՈՒՇԱԿՈՒՄԸ՝ ԸՍՏ ԱՆԲԱՑԱԶՍՅՏ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐՈՎ ԵՐԿՍԱԿԱՐԴԱԿ ՍԻԵՄԱՅԻ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հոդվածում բերված է մթնոլորտային ճնշման դաշտի կարճաժամկետ կանխադրականումը (մեկ օր) հիդրոդինամիկայի մեթոդներով՝ ըստ գծայնացված երկմակարդակ սխեմայի:

Ելնելով ազատ մթնոլորտի համար հիդրոթերմոդինամիկայի հավասարումներից ադիարադ պրոցեսի բվադիտատարիկության և բվադիդետրոֆիկության հիպոթեզներից, ստացվում են (1) և (2) հավասարումները՝ (3) և (4) եզրային պայմաններով:

Այդ հավասարումները՝ գրված 700 մբ և 300 մբ մակարդակների համար, գծայնացնելուց հետո վերջնականապես տալիս են (16) և (17) հավասարում-

որ որակը լուծվում են էիրմանի խտրացիոն մեթոդով: Անբացահայտ սխեմայի դեպքում ստացված արդյունքները բերված են աղյուսակ 1-ում, իսկ արհայտ սխեմայի դեպքում՝ աղյուսակ 2-ում:

Բանալիոն պրոցեսը անբացահայտ սխեմայի դեպքում զուգամիտում է Բրաունսթրուսթյունից հետո (մեկ օրվա համար), իսկ բացահայտ սխեմայի դեպքում՝ 75—80 մասալորուսթյունից հետո: (4) և (5)-ում ստացված արդյունքների հետ համեմատում՝ այստեղ զուգամիտման պրոցեսը 3 անգամ արագանում է:

Աղյուսակներ 1-ի և 2-ի համեմատուսթյունը ցույց է տալիս, որ τ_1 և τ_2 անսթյունները բացահայտ սխեմայի դեպքում միշտ ալկիլի մեծ են, քան անբացահայտ սխեմայի դեպքում, և բացարձակ սխալը (τ) երբեմն անցնում է ձեռնամուրից:

Հաշիվները կատարված են «Հրադղան—2» էլեկտրոնային հաշիվիչ մեկուսի միջոցով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

- Իսեմ Ի. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, М., 1957.
- Симмонс Г. Р. Monthly Weather Rev., **86**, № 8, 1958.
- Рунтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.
- Вашкович С. А. и Амбарцумян М. Г. Об оценке точности решения уравнения Лапласа методом итераций. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
- Եսոս Ս. Н. Результаты испытания численного метода прогноза карт АТ₅₅, АТ₅₆ и АТ₅₇. Метеорология и Гидрология, № 19, 1962.