ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 2, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Тоноян

О вдавливании двух жестких одинаковых штампов в упругую полуплоскость

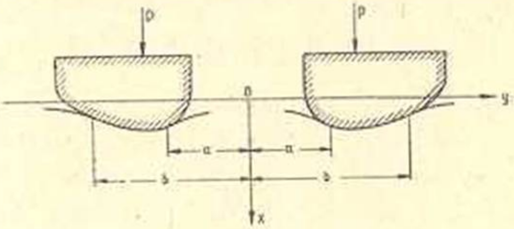
Задача о давлении одного или нескольких жестких штампов на границу упругой полуплоскости как без учета сил трения, так и с их учетом была рассмотрена Н. И. Мусхелишвили [1—3], И. Я. Штаерманом [4], Л. А. Галиным [5—6]. Мусхелишвили свел эту задачу к задаче Гильберта для отыскания одной аналитической функции. Штаерман использовал отчасти математический аппарат, созданный академиком А. М. Ляпуновым. Галин дал метод решения, несколько отличный от метода Мусхелишвили. Им была рассмотрена также задача о давлении движущегося штампа с учетом имеющих место динамических явлений. Смешанная задача для случая, когда на одной части границы упругого тела заданы смещения, а на другой напряжения и когда область, занятая упругим телом, является произвольной, была рассмотрена Д. И. Шерманом [7]. При этом для произвольной конечной области задача была приведена к интегральному уравнению Фредгольма. В работе Н. М. Бородачева [9] рассмотрена плоская контактная задача для упругого тела конечной ширины. Решение этой задачи сводится к решению дуальных тригонометрических рядов. В работах Г. Я. Попова [10—11] предлагается приближенный метод решения плоской задачи о вдавливании штампа в линейно-деформируемое основание общего типа с учетом сил сцепления или трения на участке контакта. Подробный обзор о плоских контактных задачах сделан в докладе Д. И. Шермана [8].

Решение задачи о давлении жесткого штампа общего типа, приложенного на горизонтальной границе упругой изотропной четвертьплоскости в предположении отсутствия трения, когда вертикальная граница или свободна от внешних нагрузок, или защемлена, рассмотрена автором [12—13].

В настоящей работе получено точное решение задачи о давлении двух жестких штампов общего типа, приложенных на прямолинейной границе упругой изотропной полуплоскости в предположении отсутствия трения. Решение задачи представлено в виде интегралов Фурье. Определение коэффициентов интегрирования сведено к решению „тройных" интегральных уравнений [14], причем решение „тройных" интегральных уравнений сводится к решению дуальных тригонометрических рядов [15—16]. В частности, решена задача о давлении на границу упругой полуплоскости двух жестких штампов с плоскими прямолинейными основаниями. Приведен численный пример.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу вдавливания в упругую полуплоскость (фиг. 1) двух симметрично расположенных относительно оси x жестких штампов под действием силы P, направленной параллельно оси x.



Фиг. 1.

Как известно, в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции Ф по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$$u = \frac{1}{E}\left[\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\,dx - \nu\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] - a_0 y + b_0, \tag{1.1}$$

$$v = \frac{1}{E}\left[\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,dy - \nu\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right] + a_0 x + c_0,$$

где E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, а $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.2), ограниченное при $x \to \infty$ и $y \to \infty$, может быть представлено в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^\infty [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha. \tag{1.3}$$

Здесь $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$—функции, подлежащие определению из граничных условий, заданных на свободной кромке полуплоскости.

Используя формулы (1.1) и (1.3), будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = -\int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) + \alpha x B(\alpha)]\, e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha,$$

$$\sigma_y(x, y) = \int_0^\infty \alpha^2 [A(\alpha) - 2B(\alpha) + \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha,$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \int_0^\infty \alpha^2 [B(\alpha) - A(\alpha) - \alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha, \qquad (1.4)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{E}\int_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) + (1-\nu) B(\alpha) +$$

$$+ (1+\nu)\alpha x B(\alpha)] e^{-\alpha x} \cos(\alpha y)\, d\alpha - a_0 y + b_0,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E}\int_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) - 2B(\alpha) + (1+\nu)\alpha x B(\alpha)] \times$$

$$\times e^{-\alpha x} \sin(\alpha y)\, d\alpha + a_0 x + c_0.$$

Так как при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны стремиться к нулю, то в формулах (1.4) следует положить $a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

В силу симметрии граничных условий относительно оси x можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой полуплоскости.

Граничные условия при $x = 0$ в рассматриваемой задаче будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\sigma_x(0, y) = 0 && \text{при} \quad 0 < y < a, \\ &u(0, y) = f(y) && \text{при} \quad a < y < b, \\ &\sigma_x(0, y) = 0 && \text{при} \quad b < y < \infty, \\ &\tau_{xy}(0, y) = 0 && \text{при} \quad 0 < y < \infty, \end{aligned} \qquad (1.5)$$

а в силу симметрии будем иметь также следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy}(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x < \infty. \qquad (1.6)$$

Легко видеть, что условия (1.6) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя условиям (1.5), получим

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad (0 < y < a),$$

$$\int_0^\infty \alpha [(1+\nu) A(\alpha) + (1-\nu) B(\alpha)] \cos(\alpha y)\, d\alpha = E f(y) \quad (a < y < b), \qquad (1.7)$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 A(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 \quad (b < y < \infty),$$

$$\int_0^\infty \alpha^2 [B(\alpha) - A(\alpha)] \sin(\alpha y)\, d\alpha = 0 \qquad (0 < y < \infty). \tag{1.8}$$

Используя формулу обращения Фурье, из (1.8) получим

$$A(\alpha) = B(\alpha). \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.7) и обозначая

$$\alpha^2 A(\alpha) = A^*(\alpha), \tag{1.10}$$

для определения $A^*(\alpha)$ получим „тройные" интегральные уравнения

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty A^*(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 && (0 < y < a), \\ &\int_0^\infty \frac{A^*(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha}{\alpha} = \frac{E}{2} f(y) && (a < y < b), \\ &\int_0^\infty A^*(\alpha) \cos(\alpha y)\, d\alpha = 0 && (b < y < \infty). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Задача о распределении напряжений $\sigma_x(0, y)$, возникающих в упругой полуплоскости под штампами, будет решена, если будет определена функция $A^*(\alpha)$ из „тройных" интегральных уравнений (1.11).

§ 2. Определение функции $A^*(\alpha)$

Имея в виду значения интеграла Вебер-Шафхейтлина [17]

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty J_{2n}(b\alpha) \cos(y\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} \dfrac{\cos[2n \arcsin(y/b)]}{\sqrt{b^2 - y^2}} & (y < b) \\ 0 & (y > b), \end{cases} \\ &\int_0^\infty \frac{J_{2n}(b\alpha) \cos(y\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} \cos[2n \arcsin(y/b)] & (y \leqslant b) \\ \dfrac{(-1)^n b^{2n}}{2n(y + \sqrt{y^2 - b^2})^{2n}} & (y \geqslant b), \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $J_i(x)$—функция Бесселя i-го порядка первого рода с действительным аргументом, функцию $A^*(\alpha)$ ищем в виде

$$A^*(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty A_n^* J_{2n}(b\alpha). \tag{2.2}$$

Здесь A_n^* — неизвестные пока коэффициенты, подлежащие определению.

Тогда третье уравнение (1.11) автоматически удовлетворяется. Из остальных двух уравнений, после изменения порядка интегрирования и суммирования, получим парные тригонометрические ряды в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos[2n \arcsin(y/b)] = 0 \qquad (0<y<a), \tag{2.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^*}{n} \cos[2n \arcsin(y/b)] = Ef(y) \qquad (a<y<b).$$

Обозначив

$$y = b\cos\frac{\theta}{2}, \qquad a = b\cos\frac{\lambda}{2}, \tag{2.4}$$

перепишем (2.3) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n^*}{n} \cos n\theta = \varphi(\theta) \qquad (0<\theta<\lambda),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n^* \cos n\theta = 0 \qquad (\lambda<\theta<\pi), \tag{2.5}$$

где

$$\varphi(\theta) = Ef\left(b\cos\frac{\theta}{2}\right). \tag{2.6}$$

Интегрируя первое уравнение из(2.5) по θ в пределах от 0 до θ, а второе— в пределах от θ до π, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin n\theta = \psi(\theta) \qquad (0<\theta<\lambda),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = 0 \qquad (\lambda<\theta<\pi), \tag{2.7}$$

где использованы обозначения

$$nA_n = (-1)^n A_n^*, \qquad \psi(\theta) = \int_0^\theta \varphi(\theta)\, d\theta. \tag{2.8}$$

Задачу определения коэффициентов A_n из рядов, подобных рядам (2.7), В. Ф. Шеферд [16] назвал задачей о тригонометрических рядах со смешанными условиями. Такие дуальные тригонометрические ряды рассматривались в работе К. Трантера [15].

Используя результаты К. Трантера, получаем

$$A_n = 4n\sin^2\frac{\lambda}{2}\int_0^1 s\xi(s)\, F\left(1+n, 1-n; 1; s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right) ds =$$

$$= 4n \sin^3 \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{s\xi(s)}{1 - s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}} F\left(n, -n; 1; s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right) ds, \tag{2.9}$$

где

$$\xi(s) = \frac{1 - s^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\pi s \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{\mu\psi\left\{2 \arcsin\left(\mu \sin \frac{\lambda}{2}\right)\right\}}{\sqrt{(s^2 - \mu^2)\left(1 - \mu^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\right)}} d\mu. \tag{2.10}$$

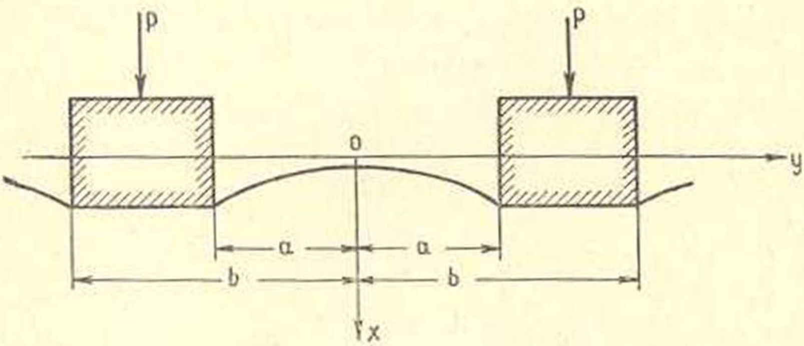
Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$—гипергеометрический ряд.

Таким образом, коэффициенты A_n^* определяются из уравнений (2.8), (2.9) и (2.10), а функция $A(\alpha)$ из (2.2) и (1.10). После определения $A(\alpha) = B(\alpha)$, напряжения и деформации в любой точке полуплоскости найдем по формулам (1.4).

§ 3. Частные случаи

В качестве примера рассмотрим задачу вдавливания двух жестких штампов, с плоскими прямолинейными основаниями, в упругую полуплоскость (фиг. 2). В этом случае $f(y) = \delta = \text{const}$ и формула (2.6) дает

$$\varphi(\theta) = E\delta. \tag{3.1}$$



Фиг. 2.

Из (2.8) имеем

$$\psi(\theta) = E\delta\theta. \tag{3.2}$$

Следовательно,

$$\psi\left\{2 \arcsin\left(\mu \sin \frac{\lambda}{2}\right)\right\} = 2E\delta \arcsin\left(\mu \sin \frac{\lambda}{2}\right). \tag{3.3}$$

Далее из (2.10) находим

$$\xi(s) = \frac{E\delta}{\sin \frac{\lambda}{2}}, \tag{3.4}$$

где использовано значение интеграла [17]

$$\int_0^s \frac{\mu \arcsin\left(\mu \sin\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{(s^2-\mu^2)\left(1-\mu^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)}}\,d\mu = -\frac{\pi}{2\sin\frac{\lambda}{2}}\ln\sqrt{1-s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}}. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.4) в (2.9), получим

$$A_n = 4E\delta n \sin^2\frac{\lambda}{2}\int_0^1 sF\left(1+n, 1-n; 1; s^2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right)ds =$$

$$= 2E\delta n \sin^2\frac{\lambda}{2}\int_0^1 F\left(1+n, 1-n; 1; \sin^2\frac{\lambda}{2}\cdot z\right)dz \qquad (z = s^2). \tag{3.6}$$

Имея в виду, что [17]

$$\int_0^1 F\left(1+n, 1-n; 1; \sin^2\frac{\lambda}{2}\cdot z\right)dz = F\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right), \tag{3.7}$$

для A_n окончательно получим

$$A_n = 2E\delta n \sin^2\frac{\lambda}{2} F\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right). \tag{3.8}$$

Полагая в формулах (1.4) $x=0$ и учитывая соотношения (1.9), (1.10), (2.1), (2.8), для $\sigma_x(0, y)$ и $u(0, y)$ получим следующие выражения:

$$\sigma_x(0, y) = -\frac{1}{b\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\cos n\theta \qquad 0<\theta<\lambda \quad (a<y<b), \tag{3.9}$$

$$u(0, y) = \frac{1}{E}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta \qquad \lambda<\theta<\pi \quad (0<y<a). \tag{3.10}$$

Подставляя (3.8) в (3.9) и (3.10), получим

$$\sigma_x(0, y) = -\frac{2E\delta\sin^2\frac{\lambda}{2}}{b\sin\frac{\theta}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} n^2F\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\cos n\theta$$

$$\begin{pmatrix} 0<\theta<\lambda \\ a<y<b \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

$$u(0, y) = 2\delta \sin^2 \frac{\lambda}{2} \sum_{n=1}^{\infty} nF\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\cos n\theta$$

$$\begin{pmatrix} 0<\theta<\lambda \\ 0<y<a \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Далее находим

$$\delta = \frac{P}{E\sin^2\frac{\lambda}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nF\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)}$$

$$\left(P = -\int_a^b \sigma_x(0, y)\,dy\right). \tag{3.13}$$

Формула (3.13) устанавливает зависимость между глубиной вдавли- вания штампов в упругую полуплоскость ниже ее невозмущенно границы и действующей на штампы силой P.

Учитывая (3.13), приводим (3.11) к виду

$$\sigma_x(0, y) = -\frac{2P\sum_{n=1}^{\infty} n^2F\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\cos n\theta}{b\sin\frac{\theta}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nF\left(1+n, 1-n; 2; \sin^2\frac{\lambda}{2}\right)\sin n\lambda} \begin{pmatrix} 0<\theta<\lambda \\ a<y<a \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Формулой (3.14) определяется распределение нормальных напряже- ний на границе упругой полуплоскости под штампами с плоским прямолинейными основаниями, а при помощи (3.12) определяютс нормальные перемещения на границе упругой полуплоскости за штам- пами.

Некоторые значения напряжения $\sigma_x(0, y)$ и перемещения $u(0, y)$ вычисленные по формулам (3.14), (3.12) для различных точек границ полуплоскости в зависимости от отношений a/b, приведены в табл. 1 и 2

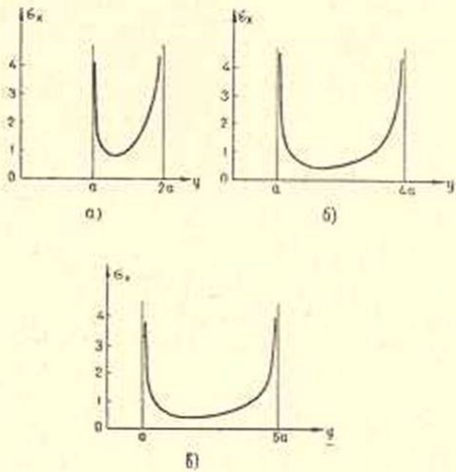
Таблица

a/b	$-\sigma_x b/P$				
	$\sigma_x(0, a)$	$\sigma_x\left(0, \frac{3a+b}{4}\right)$	$\sigma_x\left(0, \frac{a+b}{2}\right)$	$\sigma_x\left(0, \frac{a+3b}{4}\right)$	$\sigma_x(0, b)$
1/2	∞	0,8654	1,0061	1,9891	∞
1/4	∞	0,4535	0.5574	1,0144	∞
1/5	∞	0,3989	0,4205	0,8339	∞

Результаты $\sigma_x(0, y)$ при $a/b = 1/5$ совпадают с результатами, по- лученными Л. А. Галиным [5].

Таблица 2

a/b \ u/b	$u\,(0,0)$	$u\,(0,a/4)$	$u\,(0,a/2)$	$u\,(0,3a/4)$	$u\,(0,a)$
1/2	0,1999	0,2598	0,3649	0,5625	1,0000
1/4	0,2954	0,3942	0,5135	0,6791	1,0000
1/5	0,3719	0,4678	0,5625	0,7411	1,0000



Фиг. 3.

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений $\sigma_x(0, y)$ под штампами на фиг. 3 приведена эпюра этих напряжений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 VII 1963

Վ. Ս. Տոնոյան

ԵՐԿՈՒ ԿՈՇՏ ՄԻԱՏԵՍԱԿ ԴՐՈՇՄՆԵՐԻ ՆԵՐՃՆՇՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության մեջ երկու կոշտ միատեսակ ընդհանուր տիպի դրոշմների ներճնշման խնդիրը, այն ենթադրությամբ, որ շփումը դրոշմների տակ բացակայում է։ Առաձգական քառորդ հարթության եզրագծի վրա կոշտ դրոշմի ներճնշման խնդիրը, երբ ուղղահայաց եզրը կամ ազատ է կամ էլ ամրակցված, շփման ուժի բացակայության դեպքում, դիտարկվել է հեղինակի կողմից [12—13]։ Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի ինտեգրալների տեսքով։ Ինտեգրման գործակիցնե-

րի որոշումը բերվել է «եռեքական» ինտեգրալ հավասարումների [14] լուծմանը։ Ընդ որում «եռեքական» ինտեգրալ հավասարումների լուծումը բերվել է զույգ եռանկյունաչափական շարքերից կազմված հավասարումների լուծմանը [15—16]։ Մասնավորապես, լուծված է առաձգական կիսահարթության մեջ երկու կոշտ հարթ հիմքով դրոշմների ներճնշման խնդիրը։

Վերջում բերված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Решение основной смешанной задачи теории упругости для полуплоскости. ДАН СССР, **7**, № 2, 1935, 51—54.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Основные граничные задачи для полуплоскости. Сообщения АН ГрузССР, **2**, № 10, 1941.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
5. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1953.
6. *Галин Л. А.* Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости. ДАН СССР, **39**, № 3, 1943, 88—93.
7. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости со смешанными условиями. Труды сейсмологического ин-та АН СССР, № 88, 1938.
8. *Шерман Д. И.* Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. Труды Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Изд. АН СССР, М.—Л., 1962, 405—468.
9. *Бородачев Н. М.* Плоская контактная задача для упругого тела конечной ширины. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 6, 1962, 170—172.
10. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961, 81—96.
11. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 2, 1963, 15—32.
12. *Тоноян В. С.* Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости. ДАН АрмССР, **37**, № 3, 1963.
13. *Тоноян В. С.* Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. ДАН АрмССР, **37**, № 5, 1963.
14. *Tranter C. J.* The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. Quart. J. Mech. and App. Math., **14**, part. 3, 1961, 283—292.
15. *Tranter C. J.* Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., **4**, part 2, 1959, 49—57.
16. *Shepherd W. M.* On trigonometrical series with mixed conditions. Proc. London Math. Soc. (2), **43**, 1937, 366—375.
17. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.