

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. С. Заргарян

Кручение призматических стержней полигонального поперечного сечения с произвольно расположенной круговой цилиндрической полостью

В настоящей работе рассматривается задача кручения призматических стержней, поперечное сечение которых ограничено извне криволинейным многоугольником, а изнутри кривой, с достаточной степенью точности близкой к окружности.

Для решения этой задачи методом конформного отображения предлагается способ построения функций, реализующих конформное отображение концентрического кольца на вышеуказанную двусвязную область, представляющую поперечное сечение стержня, с границами, близкими в каком-либо направлении.

Решение поставленной задачи получается в замкнутом виде.

В качестве примера рассмотрена задача о кручении стержня квадратного поперечного сечения с круглым несоосным отверстием. Аналогичная задача для области, внутренний контур которой—окружность, а внешний достаточно близок к квадрату, была рассмотрена Ю. А. Амен-Заде [5], причем решение задачи было сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма, для решения которого получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

§ 1. Построение функции, реализующей конформное отображение кольца в двусвязную область с границами, близкими в каком-либо направлении

Отображение внутренней области многоугольника G на внутренность единичного круга $|\zeta_1| < 1$ осуществляется функцией Кристоффеля-Шварца

$$z^* = \omega^*(\zeta_1) = K_1 \int_0^{\zeta_1} (d_1 - t)^{\alpha_1 - 1} (d_2 - t)^{\alpha_2 - 1} \dots (d_n - t)^{\alpha_n - 1} dt + K_2, \quad (1.1)$$

где d_1, d_2, \dots, d_n — точки окружности единичного круга $|\zeta_1| = 1$, соответствующие вершинам многоугольника D_1, D_2, \dots, D_n , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника; K_1 и K_2 — вообще комплексные постоянные.

При этом отображении окружности $|\zeta_1| = 1$ на плоскости z^* со-

ответствует контур полигональной области Γ_0 , а окружности $|\zeta_1| = \text{const} < 1$ — некоторая замкнутая кривая Γ_1 , вырождающаяся при $|\zeta_1| = 0$ и условию $\omega^*(0) = 0$ в начало координат $z^* = 0$. Следовательно, область, ограниченная замкнутыми непересекающимися линиями Γ_0 и Γ_1 , двусвязная.

Для получения отображающей функции двусвязной области, одна из границ которой — та же Γ_0 , а другая — Γ_2 , отличная от образов окружностей $|\zeta_1| = \text{const} < 1$, имела бы произвольное расположение по отношению к Γ_0 , поступим следующим образом: единичный круг $|\zeta_1| \leq 1$, который отображается на область многоугольника G , отображим на самого себя известной функцией

$$\zeta_1 = \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \zeta_0 \zeta} \quad (\zeta = \rho e^{i\theta}) \quad (1.2)$$

(ζ_0 — произвольная точка круга $|\zeta| < 1$) так, чтобы начало координат новой плоскости ζ , соответствующее произвольной внутренней точке $\zeta_1 = -\zeta_0$ плоскости ζ_1 , перешло бы в соответствующую внутреннюю точку z_0^* области z^* , что равнозначно переносу начала координат плоскости z^* в точку z_0^* .

Подстановка (1.2) в (1.1) не приведет к изменению внешней границы Γ_0 , так как отображение единичного круга на самого себя обладает свойством сохранения своей первоначальной границы. С другой стороны, образом окружности $|\zeta| = \rho < 1$ теперь уже будет замкнутая кривая Γ_2 , иначе расположенная по отношению к Γ_0 , нежели Γ_1 , и ограничивающая односвязную область, вырождающуюся при $|\zeta| = 0$ в начало $z = 0$ плоскости z , совмещенное с точкой z_0^* области G .

Подставляя (1.2) в (1.1), учитывая при этом известное соотношение для внутренних n углов полигональной области

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n - 2 \quad (1.3)$$

и полагая $\omega(0) = 0$, получим

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \int_0^{\zeta} (\gamma_1 - t)^{\alpha_1 - 1} (\gamma_2 - t)^{\alpha_2 - 1} \dots (\gamma_n - t)^{\alpha_n - 1} dt, \quad (1.4)$$

где

$$\gamma_k = \frac{d_k + \zeta_0}{1 + d_k \zeta_0}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

а B_0 — вообще комплексная постоянная.

Определение параметров формулы Кристоффеля-Шварца для какого-нибудь вполне определенного расположения начала координат плоскости z по отношению к границе области G связано с большими математическими трудностями [3]. Определение этих параметров для той же области в случае другого расположения начала координат, вероятно, привело бы к аналогичным осложнениям.

Однако, формула (1.5) позволяет без труда определять параметры формулы Кристоффеля-Шварца для произвольного расположения на-

чала координат плоскости z , если заранее известны значения этих параметров хотя бы для одного определенного расположения начала координат плоскости z по отношению к границе области G .

Разлагая (1.4) в ряд Тейлора

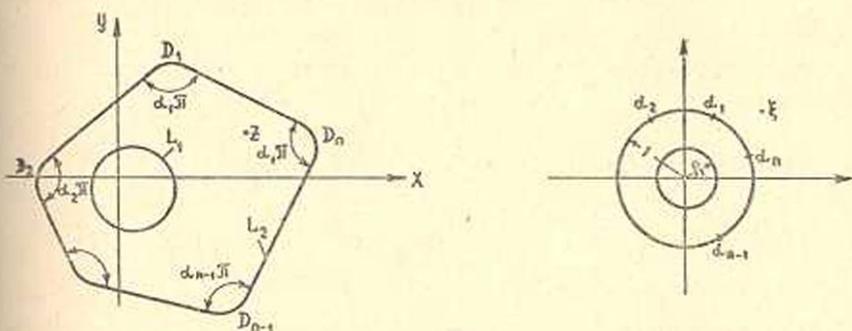
$$\omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^k, \quad \text{где } B_1 = 1, \quad (1.6)$$

и учитывая то, что вид функции (1.1) и после преобразования (1.2) не изменился, воспользуемся рекуррентной формулой для последовательного определения коэффициентов B_k , предложенной в [4]:

$$B_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[(k-1) B_{k-1} \sum_{s=1}^n \frac{1-a_s}{r_s} + \right. \\ \left. + (k-2) B_{k-2} \sum_{s=1}^n \frac{1-a_s}{r_s^2} + \dots + B_1 \sum_{s=1}^n \frac{1-a_s}{r_s^{k-1}} \right] \\ (k=2, 3, \dots). \quad (1.7)$$

Окружностям $|\zeta| = \rho < 1$ ($\zeta = \rho e^{i\theta}$) плоскости ζ на плоскости z будут соответствовать замкнутые кривые L_ρ , ограничивающие односвязные области G_ρ , каждая из которых содержит в себе начало координат.

Ограничимся N первыми членами разложения (1.6). Пусть окружности $\rho = \rho_1$ соответствует кривая L_1 , а $\rho = \rho_2 = 1$ — контур полигональной области L_2 с закругленными углами (фиг. 1).



Фиг. 1.

Если дискретные точки $\rho_1 e^{i\theta_k}$ располагаются по кривой L_1 , близкой к окружности и, кроме того, при $\rho = \rho_1$ выполнено условие выпуклости L_1 [2]

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\zeta \omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] + 1 \geq 0, \quad (1.8)$$

то можно при этом утверждать, что кривая L_1 близка к окружности. Известно [2], что граница выпуклости класса регулярных и однолистных в $|\zeta| < 1$ функций $\rho^* = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26$. В отдельных случаях,

в частности, для рациональных функций, отображающих выпуклые односвязные области на внутренность единичного круга, граница выпуклости оказывается намного больше ρ^* .

Для хорошего приближения к внешнему контуру заданной полигональной области необходимо взять достаточно большое число первых N членов в отображающей функции (1.6). Внутренний же контур независимо от внешнего, при малых $\rho_1 < 1$, близок к окружности с любой заданной точностью, причем последняя возрастает с уменьшением радиуса. В практических расчетах радиус круга может быть увеличен в широких пределах.

Таким образом, учитывая, что окружности $|\zeta| = \rho_1$ плоскости ζ на плоскости z соответствует близкая к окружности внутренняя граница L_1 , а $\rho_2 = 1$ — наружная граница L_2 (фиг. 1), можно считать полином, составленный из первых N членов (1.6), функцией, конформно отображающей двусвязную область, ограниченную кривыми L_1 и L_2 , на круговое кольцо $\rho_1 < \rho < 1$.

§ 2. Кручение стержня двусвязного поперечного сечения

Задача свободного кручения призматических стержней двусвязного поперечного сечения сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 \Psi = -2 \quad (\nabla^2 - \text{оператор Лапласа}) \quad (2.1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \text{на } L_1 & \quad \Psi = C, \\ \text{на } L_2 & \quad \Psi = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где C — постоянная, подлежащая определению.

Представим функцию напряжений $\Psi(x, y)$ в комплексном виде

$$\Psi = -\frac{i}{2} [\Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} - iz\bar{z}], \quad (2.3)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Функция

$$\Phi_1(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

есть комплексный потенциал кручения, причем $\varphi(x, y)$ — функция кручения, а $\psi(x, y)$ — комплексно сопряженная с последней.

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^N B_k \zeta^k, \quad (2.4)$$

составленная из первых N членов разложения (1.6), отображает рассматриваемую двусвязную область на круговое кольцо $\rho_1 < \rho < 1$. Подставив (2.4) в (2.3), получим

$$\Psi = -\frac{i}{2} [\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - i\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}]. \quad (2.5)$$

Функцию $\Phi(\zeta)$, регулярную в кольце $\rho_1 < \rho \leq 1$, будем искать в виде

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad (2.6)$$

где $a_n = b_n + ic_n$.

Произведение $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$, входящее в (2.5), на линиях $\rho = \text{const}$ разложим в ряд Фурье

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} |B_0|^2 \sum_{k=1}^N (p_k^2 + q_k^2) \rho^{2k}, \\ a_n &= |B_0|^2 \sum_{k=1}^N (p_k p_{k+n} + q_k q_{k+n}) \rho^{2k+n}, \\ \beta_n &= |B_0|^2 \sum_{k=1}^N (q_k p_{k+n} - p_k q_{k+n}) \rho^{2k+n}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где p_k и q_k — соответственно действительные и мнимые части коэффициентов B_k функции (2.4). При $\rho = \rho_1$ коэффициенты a_n и β_n будут снабжены сверху индексом (1), а при $\rho = \rho_2 = 1$ — индексом (2).

Удовлетворяя граничные условия (2.2), определим искомые коэффициенты

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\alpha_k^{(1)} - \alpha_k^{(2)} \rho_1^{-k}}{\rho_1^k - \rho_1^{-k}}, & b_k &= \frac{\beta_k^{(1)} - \beta_k^{(2)} \rho_1^{-k}}{\rho_1^k - \rho_1^{-k}}, \\ c_{-k} &= \frac{\alpha_k^{(2)} \rho_1^k - \alpha_k^{(1)}}{\rho_1^k - \rho_1^{-k}}, & b_{-k} &= \frac{\beta_k^{(1)} - \beta_k^{(2)} \rho_1^k}{\rho_1^k - \rho_1^{-k}}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$.

Для остальных $k > N$ $c_k = c_{-k} = b_k = b_{-k} = 0$. Постоянные α_0 и C , не влияющие на напряженное состояние, равны $C = \alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}$, $\alpha_0 = i\alpha_0^{(2)}$.

§ 3. Определение крутящего момента

Главный момент внешних напряжений, приложенных к основанию стержня равен,

$$M = \tau D, \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, D — жесткость при кручении.

Как известно [1],

$$D = \frac{\mu}{8i} \int_{\Gamma} \overline{\omega(\sigma)^2} \omega(\sigma) d\omega(\sigma) - \frac{\mu}{8i} \int_{\Gamma} \omega(\sigma)^2 \overline{\omega(\sigma)} d\overline{\omega(\sigma)} -$$

$$-\frac{\mu}{4} \int_{\gamma} [\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)}] d\omega(\sigma) \overline{\omega(\sigma)}; \quad (3.2)$$

здесь интегрирование производится при движении в положительном направлении по всему контуру кольца γ , μ — модуль сдвига, σ — граничное значение переменной ζ .

Разлагая в (3.2) подинтегральные выражения в ряд по степеням σ и учитывая при этом, что на границе γ , где $\sigma_j = \rho_j^2$ ($j=1, 2$), имеют место следующие равенства:

$$\omega(\sigma) \overline{\omega\left(\frac{\rho_j^2}{\sigma}\right)} = \sum_{-N}^N \lambda_n^{(j)} \sigma^n,$$

где

$$\lambda_0^{(j)} = 2\alpha_0^{(j)}, \quad \lambda_n^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} - i\beta_n^{(j)}) \rho_j^{-n}, \quad \lambda_{-n}^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} + i\beta_n^{(j)}) \rho_j^n; \quad (3.3)$$

$$\overline{\omega\left(\frac{\rho_j^2}{\sigma}\right)} \omega'(\sigma) = \sum_{-N}^N A_n^{(j)} \sigma^n,$$

$$A_0^{(j)} = |B_0|^2 \sum_{k=1}^N (k+1) \overline{B_k} B_{k+1} \rho_j^{2k},$$

$$A_{-n}^{(j)} = |B_0|^2 \sum_{k=1}^N k B_k \overline{B_{k+n-1}} \rho_j^{2(k+n-1)},$$

$$A_n^{(j)} = |B_0|^2 \sum_{k=n}^N (k+n+1) \overline{B_k} B_{k+n+1} \rho_j^{2k}. \quad (3.4)$$

после интегрирования получим

$$D = \frac{\mu\pi}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) - \sum_{n=1}^N (\lambda_n^{(1)} A_{-n-1}^{(1)} + \lambda_{-n-1}^{(1)} A_n^{(1)}) \right] + \\ + \mu\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(2)} - a_n \lambda_{-n}^{(2)}) - \sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(1)} - a_n \lambda_{-n}^{(1)}) \right]. \quad (3.5)$$

§ 4. Определение напряжений

Напряжения при кручении определяются по формуле [1]

$$\tau_\rho - i\tau_\theta = \mu\tau \frac{\zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} [\Phi'(\zeta) - i\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)]. \quad (4.1)$$

Отделяя действительные и мнимые части в (4.1) и полагая, что фигурирующие в (3.4) коэффициенты $A_n^{(j)} = T_n^{(j)} + iR_n^{(j)}$, согласно (2.4), (2.6) и (3.4), получим

$$\tau_\rho = \frac{\mu\tau}{|\omega'(\zeta)|} \left[\sum_{n=1}^N [(nb_n + R_{n-1}) \rho^{n-1} - (nb_{-n} - R_{-n-1}) \rho^{-n-1}] \cos n\theta + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^N [(T_{n-1} - nc_n) \rho^{n-1} - (T_{-n-1} + nc_{-n}) \rho^{-n-1}] \sin n\theta, \quad (4.2)$$

$$\gamma = \frac{\mu\tau}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ T_{-1} \rho^{-1} + \sum_{n=1}^N [(T_{n-1} - nc_n) \rho^{n-1} + (T_{-n-1} + nc_{-n}) \rho^{-n-1}] \cos n\theta - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^N [(nb_n + R_{n-1}) \rho^{n-1} + (nb_{-n} - R_{-n-1}) \rho^{-n-1}] \sin n\theta \right\}. \quad (4.3)$$

Для $\rho=1$ и $\rho=\rho_1$, с учетом (2.8) и (3.4), можно показать, что $\tau_r(\rho=1)=0$, $\tau_r(\rho=\rho_1)=0$.

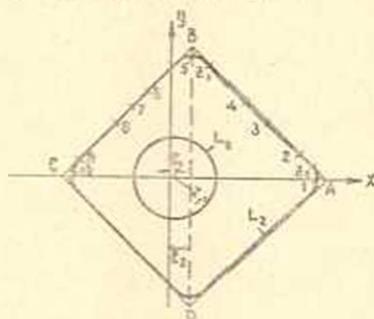
§ 5. Кручение стержня квадратного поперечного сечения с несоосным круговым отверстием

Рассмотрим задачу кручения стержня, поперечное сечение которого ограничено извне криволинейным квадратом L_2 , а изнутри — кривой L_1 , достаточно близкой к окружности. Для этого случая в (1.1) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,5$.

Пусть сторона прямолинейного квадрата, описанного около криволинейного L_2 , равна a . Абсциссы центров окружности L_1 и криволинейного квадрата L_2 , расположенных на действительной оси, соответственно обозначим через ε_1 и ε_2 (фиг. 2).

В качестве исходных значений параметров, входящих в (1.1), примем $d_1=1$, $d_2=i$, $d_3=-1$ и $d_4=-i$, что соответствует случаю отображения квадрата, центр которого находится в начале координат. Для получения действительных коэффициентов отображающей функции (2.4) параметр ζ_0 , фигурирующий в (1.5), должен принимать также действительные значения. В частном случае принимая $\zeta_0=0,2$,

по (1.5) находим, что $\gamma_1=1$, $\gamma_2=e^{i\theta}$, $\gamma_3=-1$ и $\gamma_4=e^{-i\theta}$, где $\theta=67^\circ 20'$. Ограничиваясь $N=27$ и положив коэффициент B_0 действительным, по (1.7) определим коэффициенты B_k отображающей функции (2.4)



Фиг. 2.

$B_1 = 1,0$	$B_{10} = -0,01048$	$B_{19} = 0,00484$
$B_2 = 0,1925$	$B_{11} = 0,02203$	$B_{20} = -0,00548$
$B_3 = 0,07420$	$B_{12} = 0,01752$	$B_{21} = 0,00338$
$B_4 = -0,06060$	$B_{13} = 0,01833$	$B_{22} = 0,00503$
$B_5 = 0,03996$	$B_{14} = -0,00551$	$B_{23} = 0,01038$
$B_6 = 0,03587$	$B_{15} = 0,00337$	$B_{24} = 0,00142$
$B_7 = 0,06295$	$B_{16} = 0,00132$	$B_{25} = 0,00043$
$B_8 = 0,00641$	$B_{17} = 0,01637$	$B_{26} = -0,00195$
$B_9 = 0,00165$	$B_{18} = 0,00756$	$B_{27} = 0,00559$

(5.1)

Построенные по этим коэффициентам кривые приведены на фиг. 2. Для рассматриваемого частного случая $e_1 = 0,0294B_0$, а $e_2 = 0,21B_0$. Как видно из построения, квадрат L_2 имеет закругленные углы и слегка вогнутые стороны. Покажем, что кривая L_1 , соответствующая $\rho_1 = 0,4$ является выпуклой. Действительно, согласно (1.8) с учетом (2.4), условие выпуклости кривой L_1 переписывается так:

$$1 + C_0 + \sum_{n=1}^{27} C_n \cos n\theta > 0, \quad (5.2)$$

где

$$C_0 = \sum_{k=2}^{27} k^3 B_k^2 \rho_1^{2k-2} > 0 \quad \text{при } \rho_1 \neq 0,$$

$$C_n = B_{n+1} \rho_1^n (n^2 + 3n + 2) + \sum_{k=2}^{27-n} (2k^3 + 3k^2n + kn^2) B_k B_{k+n} \rho_1^{2k-2+n}$$

($n = 1, 2, \dots, 27$).

Так как

$$\left| \sum_{n=1}^{27} C_n \cos n\theta \right| < \sum_{n=1}^{27} |C_n|, \quad (5.3)$$

а $\sum_{n=1}^{27} |C_n| = 0,74922$, то неравенство (5.2) выполняется. Следовательно, кривая L_1 выпуклая. С другой стороны, разница радиусов кривой L_1 и близкой к окружности, не превышает 1,4%. Поэтому можно считать L_1 окружностью с достаточной для практики точностью. Радиус окружности $r_1 = 0,40511B_0$.

Опишем около криволинейного квадрата L_2 прямолинейный, стороны которого касаются L_2 . Пусть A, B, C и D — вершины описанного квадрата. Каждая сторона квадрата $ABCD$ касается криволинейного квадрата, по крайней мере, в двух точках. Выбрав точки касания z_1 и z_2 (фиг. 2) стороны AB и имея аналитические значения их координат согласно (2.4), напомним уравнение прямой AB , из которого и определим абсциссу точки A . Аналогично определим абсциссу точки C . В рассматриваемом частном случае $x_A = 1,59B_0$, $x_C = -1,17B_0$. По этим координатам установим зависимость между коэффициентом B_0 и стороной описанного квадрата a : $B_0 = 0,51239a$.

Жесткость рассматриваемого сечения, вычисленная по (3.5), равна $D = 0,13472 \mu a^4$.

Значения касательных напряжений τ_s по внешнему контуру рассматриваемого сечения, вычисленные по (4.3), в нескольких точках приведены в таблице.

Таблица

№№ точек	θ_k	τ_{θ_k} в $\mu\tau a$	№№ точек	θ_k	τ_{θ_k} в $\mu\tau a$
1	0°	0,357942	6	90°	0,685246
2	5°	0,414956	7	120°	0,765498
3	20°	0,667562	8	145°	0,590758
4	45°	0,604663	9	175°	0,270984
5	67°20'	0,317373	10	180°	0,250508

Из приведенной таблицы напряжений τ_{θ} видно, что наличие несосной круговой полости даже с небольшим эксцентриситетом $e_1 - e_2 = 0,09254a$ в местах сближения контуров ведет к значительному увеличению напряжений.

Греванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 5 VII 1963.

Ս. Ս. Զարգարյան

ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾԲ ՈՒՆԵՑՈՂ, ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԽՈՌՈՋՈՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՋՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է ախպիսի ձողերի ոլորման խնդիրը, որն է լայնական կտրվածքը արտաքինից սահմանափակված է կտրագիծ բաղաձայնությամբ, իսկ ներքինը՝ ախպիսի կտրով, որը բավականաչափ մաս է շրջանագծին:

Խնդիրը լուծվում է կոնֆորմ արտապատկերումների մեթոդով, ընդ որում լուծումն ստացվում է փակ տեսքով:

Որպես օրինակ դիտարկված է ոչ համապատասխան շրջանաչին խոռոչով բաղաձայն լայնական կտրվածք ունեցող ձողի ոլորման խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мухелишвили Н. Я. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Гостехтеориздат, М.—Л., 1952.
3. Какторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, М.—Л., 1922.
4. Сапожжян О. М. К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля—Шварца. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 9, № 9, 1956.
5. Амян-Заде Ю. Н. Местные напряжения при кручении призматического бруса квадратного сечения с круглым несоосным отверстием. Известия АН СССР, Мех. и маш., № 5, 1959.